Тренировочная работа №2 по МАТЕМАТИКЕ
10-11класс
15 мая 2020 года
Вариант МА1900710
(профильный уровень)

Выполнена: ФИО_________________________________ класс _______

Инструкция по выполнению работы

На выполнение тренировочной работы по математике даётся 235 минут. Работа включает в себя 19 заданий и состоит из двух частей.

Ответом в заданиях части 1 (1–12) является целое число или десятичная дробь. Запишите ответ в отведённом для него месте на листе с заданиями.

В заданиях части 2 (13–19) требуется записать полное решение на отдельном чистом листе.

При выполнении работы нельзя пользоваться учебниками, рабочими тетрадями, справочниками, калькулятором.

При необходимости можно пользоваться черновиком. Записи в черновике проверяться и оцениваться не будут.

Выполнять задания можно в любом порядке, главное — правильно решить как можно больше заданий. Советуем Вам для экономии времени пропускать задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходить к следующему. Если после выполнения всей работы у Вас останется время, можно будет вернуться к пропущенным заданиям.

Желаем успеха!

© СтатГрад 2019−2020 уч. г.

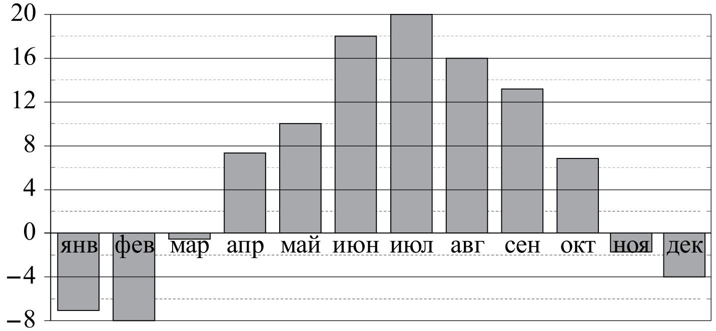
Часть 1

В заданиях 1–12 дайте ответ в виде целого числа, или десятичной дроби, или последовательности цифр.

1 Шариковая ручка стоит 30 рублей. Какое наибольшее количество таких ручек можно будет купить на 500 рублей после повышения цены на 20 %?

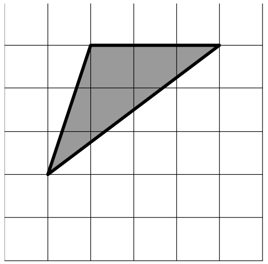
Ответ: ___________________________.

2 На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Санкт-Петербурге за каждый месяц 1999 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме наименьшую среднемесячную температуру в 1999 году. Ответ дайте в градусах Цельсия.



Ответ: ___________________________.

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник. Найдите его площадь.



Ответ: ___________________________.

© СтатГрад 2019−2020 уч. г.

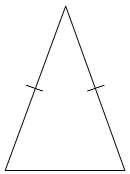
4 Чтобы поступить в институт на специальность «Переводчик», абитуриент должен набрать на ЕГЭ не менее 61 балла по каждому из трёх предметов — математика, русский язык и иностранный язык. Чтобы поступить на специальность «Социология», нужно набрать не менее 61 балла по каждому из трёх предметов — математика, русский язык и обществознание.
Вероятность того, что абитуриент О. получит не менее 61 балла по математике, равна 0,6, по русскому языку — 0,7, по иностранному языку — 0,5 и по обществознанию — 0,6.
Найдите вероятность того, что О. сможет поступить на одну из двух упомянутых специальностей.

Ответ: ____________________________.

5 Найдите корень уравнения $\dfrac{1}{6x-10}=\dfrac{1}{11}$.

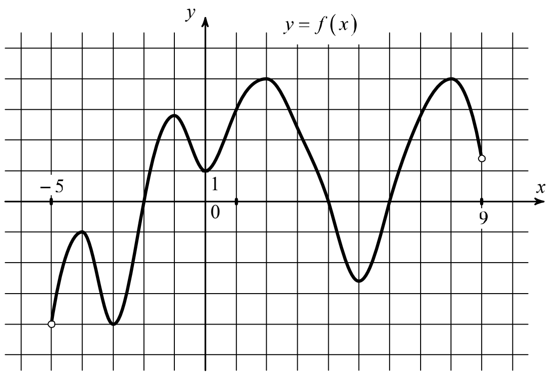
Ответ: ____________________________.

6 Угол при вершине, противолежащей основанию равнобедренного треугольника, равен 30°. Боковая сторона треугольника равна 10. Найдите площадь этого треугольника.



Ответ: ____________________________.

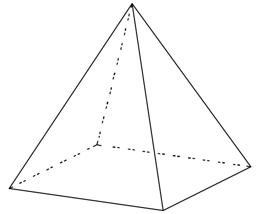
7 На рисунке изображён график функции $y=f(x)$, определённой на интервале $(-5;9)$. Найдите сумму точек экстремума функции $f(x)$.



Ответ: ____________________________.

© СтатГрад 2019−2020 уч. г.

8 Стороны основания правильной четырёхугольной пирамиды равны 18, боковые рёбра равны 15. Найдите площадь поверхности этой пирамиды.



Ответ: ____________________________.

9 Найдите значение выражения $\dfrac{\sqrt{m}}{\sqrt[5]{m}\cdot\sqrt[20]{m}}$ при $m=625$.

Ответ: ____________________________.

10 Груз массой 0,25 кг колеблется на пружине. Его скорость v меняется по закону $v=v_0\cos\dfrac{2\pi t}{T}$, где t — время с момента начала колебаний, $T=2$ с — период колебаний, $v_0=1,2$ м/с. Кинетическая энергия E (в джоулях) груза вычисляется по формуле $E=\dfrac{mv^2}{2}$, где m — масса груза в килограммах, v — скорость груза в м/с. Найдите кинетическую энергию груза через 38 секунд после начала колебаний. Ответ дайте в джоулях.

Ответ: ____________________________.

11 Часы со стрелками показывают 1 час 30 минут. Через сколько минут минутная стрелка в десятый раз поравняется с часовой?

Ответ: ____________________________.

12 Найдите точку максимума функции $y=\sqrt{-61-16x-x^2}$.

Ответ: ____________________________.

© СтатГрад 2019−2020 уч. г.

Часть 2

В заданиях 13–19 запишите полное решение на отдельном чистом листе.

13 а) Решите уравнение $\left(3x^2-19x+20\right)\left(2\cos x+\sqrt{3}\right)=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{3\pi}{2};3\pi\right]$.

14 В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC с основанием AC. Точка K — середина ребра A_1B_1, а точка M делит ребро AC в отношении $AM:MC=1:3$.

а) Докажите, что прямая KM перпендикулярна AC.

б) Найдите угол между прямой KM и плоскостью ABC, если $AB=12$, $AC=16$ и $AA_1=6$.

15 Решите неравенство $\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{x^2+x-3}{x+1}}\le\frac{2}{3}\cdot 2{,}5^{x-\frac{3}{x+1}}$.

16 В треугольнике ABC на продолжении стороны AC за вершину A отложен отрезок AD, равный стороне AB. Прямая, проходящая через точку A параллельно BD, пересекает сторону BC в точке M.

а) Докажите, что AM — биссектриса угла BAC.

б) Найдите площадь трапеции $AMBD$, если площадь треугольника ABC равна 54 и известно отношение $AC:AB=5:4$.

17 15 января Андрей планирует взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1,2 млн рублей. Условия его возврата следующие:

– 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где r — целое число;

– выплата должна производиться ежемесячно в период со 2-го по 14-е число каждого месяца;

– 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии с таблицей.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (млн рублей)	1,2	1	0,8	0,6	0,3	0,1	0

Найдите наименьшее значение r, при котором Андрею в общей сумме придётся выплатить больше 1,7 млн рублей.

18 Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} |x-a|+2|y-a|=5, \\ xy-x-y+1=0 \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

19 а) Найдите хотя бы одно такое натуральное число n, что десятичная запись числа n^2+4n оканчивается всеми цифрами числа n, записанными в том же порядке.

б) Может ли такое число оканчиваться цифрой 1?

в) Найдите все такие четырёхзначные числа.

math100.ru

Ответы на тренировочные варианты 1900709-1900710 (профильный уровень) от 15.05.2020

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1900709	11	- 2	3	0,078	2	81	- 28	84	9	0,072	490	7
1900710	13	- 8	4,5	0,21	3,5	25	7	756	5	0,18	630	- 8

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

13 а) Решите уравнение $\left(3x^2-19x+20\right)\left(2\cos x+\sqrt{3}\right)=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{3\pi}{2};3\pi\right]$.

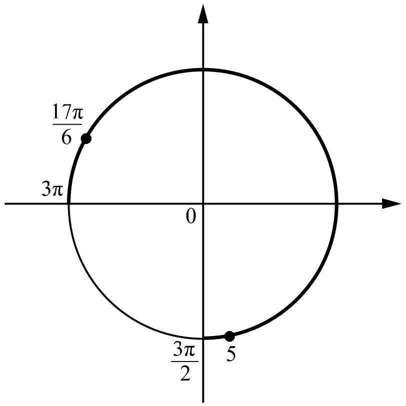
Решение.

а) Запишем уравнение в виде

$$(x-5)(3x-4)\left(2\cos x+\sqrt{3}\right)=0.$$

Значит, $x=5$, $x=\frac{4}{3}$ или $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, откуда $x=\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

б) Заметим, что $\frac{4}{3}<2<\frac{3\pi}{2}<5<3\pi$. С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2};3\pi\right]$.



Получим 5; $\frac{17\pi}{6}$.

Ответ: а) 5; $\frac{4}{3}$; $\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; б) 5; $\frac{17\pi}{6}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

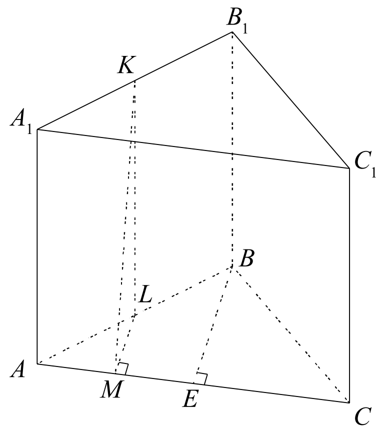
© СтатГрад 2019−2020 уч. г.

14 В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC с основанием AC. Точка K — середина ребра A_1B_1, а точка M делит ребро AC в отношении $AM:MC=1:3$.

а) Докажите, что прямая KM перпендикулярна AC.

б) Найдите угол между прямой KM и плоскостью ABC, если $AB=12$, $AC=16$ и $AA_1=6$.

Решение.



а) Пусть L — середина ребра AB, E — середина ребра AC. Так как треугольник ABC равнобедренный, отрезок BE перпендикулярен отрезку AC. Поскольку $AM:MC=1:3$, имеем $AM=ME$. Значит, треугольник AML подобен треугольнику AEB. Следовательно, отрезок LM перпендикулярен отрезку AC. Поскольку отрезок KL перпендикулярен плоскости ABC, получаем, что отрезок AC перпендикулярен плоскости KLM, а значит, прямая KM перпендикулярна AC.

б) Отрезок KL перпендикулярен плоскости ABC и LM — проекция KM на плоскость ABC, поэтому искомый угол равен углу LMK. Имеем

$KL=AA_1=6$; $ML=\sqrt{AL^2-AM^2}=\sqrt{6^2-4^2}=2\sqrt{5}$.

Следовательно,

$$\operatorname{tg}\angle LMK=\frac{LK}{LM}=\frac{6}{2\sqrt{5}}=\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}.$$

Ответ: б) $\operatorname{arctg}\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

© СтатГрад 2019−2020 уч. г.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство $\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{x^2+x-3}{x+1}} \le \frac{2}{3}\cdot 2{,}5^{x-\frac{3}{x+1}}$.

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{x^2+x-3}{x+1}} \le \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{x^2+x-3}{x+1}}; \qquad \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{x^2+x-3}{x+1}} \le \frac{2}{3}.$$

Значит, $\frac{x^2+x-3}{x+1} \ge 1$, то есть $\frac{(x-2)(x+2)}{x+1} \ge 0$, откуда $-2 \le x < -1$ или $x \ge 2$.

Ответ: $[-2;-1)$; $[2;+\infty)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

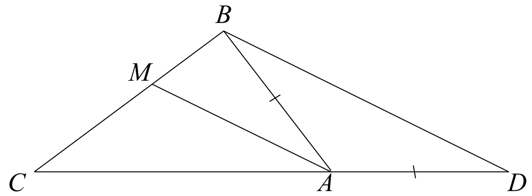
16 В треугольнике ABC на продолжении стороны AC за вершину A отложен отрезок AD, равный стороне AB. Прямая, проходящая через точку A параллельно BD, пересекает сторону BC в точке M.

а) Докажите, что AM — биссектриса угла BAC.

б) Найдите площадь трапеции $AMBD$, если площадь треугольника ABC равна 54 и известно отношение $AC:AB = 5:4$.

© СтатГрад 2019−2020 уч. г.

Решение.



а) Обозначим $\angle BAC = \alpha$. По теореме о внешнем угле треугольника $\angle ABD + \angle ADB = \alpha$. Треугольник ABD равнобедренный, поэтому $\angle ADB = \angle ABD = \frac{\alpha}{2}$, а так как AM параллельна BD,

$$\angle MAC = \angle BDC = \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\angle BAC.$$

Следовательно, AM — биссектриса угла BAC.

б) По свойству биссектрисы треугольника

$$\frac{CM}{MB} = \frac{AC}{AB} = \frac{5}{4},$$

значит,

$$\frac{S_{ACM}}{S_{ABC}} = \frac{CM}{CB} = \frac{5}{9}, \quad S_{ACM} = \frac{5}{9}S_{ABC} = \frac{5}{9}\cdot 54 = 30.$$

Треугольник DCB подобен треугольнику ACM с коэффициентом $\frac{9}{5}$, поэтому

$$S_{DCB} = \left(\frac{9}{5}\right)^2 S_{ACM} = \frac{81}{25}\cdot 30 = 97{,}2.$$

Следовательно,

$$S_{AMBD} = S_{DCB} - S_{ACM} = 97{,}2 - 30 = 67{,}2.$$

Ответ: 67,2.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ	1

© СтатГрад 2019−2020 уч. г.

Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 15 января Андрей планирует взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1,2 млн рублей. Условия его возврата следующие:

– 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где r — целое число;
– выплата должна производиться ежемесячно в период со 2-го по 14-е число каждого месяца;
– 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии с таблицей.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (млн рублей)	1,2	1	0,8	0,6	0,3	0,1	0

Найдите наименьшее значение r, при котором Андрею в общей сумме придётся выплатить больше 1,7 млн рублей.

Решение.

Пусть S_n — сумма, которую Андрей выплачивает в n-м месяце кредитования. Также для удобства произведём замену: $k = 1 + \frac{r}{100}$.

Тогда

$S_1 = 1{,}2 \cdot k - 1$ (изначальный долг в 1,2 миллиона рублей увеличится в k раз, а во втором месяце на счёте должен остаться 1 млн рублей).

Аналогично

$S_2 = 1 \cdot k - 0{,}8$; $S_3 = 0{,}8 \cdot k - 0{,}6$; $S_4 = 0{,}6 \cdot k - 0{,}3$; $S_5 = 0{,}3 \cdot k - 0{,}1$;

$S_6 = 0{,}1 \cdot k$.

Общая сумма выплат S составляет

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6 = 4k - 2{,}8.$$

Вспомним, что $k = 1 + \frac{r}{100}$, и решим неравенство:

$$4 + \frac{4r}{100} - 2{,}8 > 1{,}7; \quad \frac{4r}{100} > 0{,}5; \quad r > 12{,}5.$$

Наименьшее целое решение: 13.

Ответ: 13.

© СтатГрад 2019−2020 уч. г.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Верно построена математическая модель, и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения a, при каждом из которых система

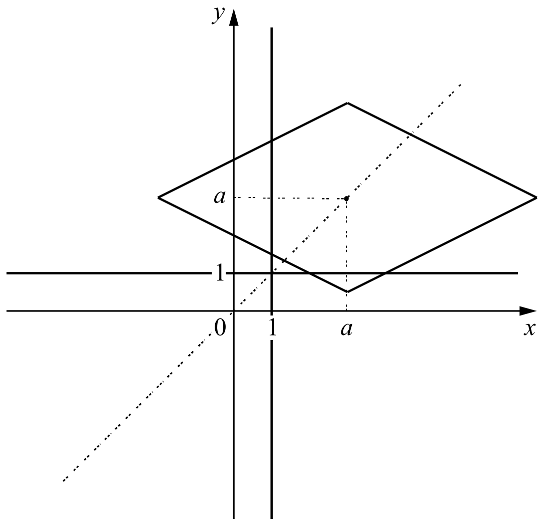
$$\begin{cases} |x-a| + 2|y-a| = 5, \\ xy - x - y + 1 = 0 \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

Решение.

Первое уравнение задаёт на координатной плоскости ромб с диагоналями 10 и 5, параллельными осям Ox и Oy соответственно, и с центром в точке $(a;a)$.

Второе уравнение задаёт две прямые $x = 1$ и $y = 1$.



Система имеет ровно три решения в одном из двух случаев: либо одна из прямых пересекает ромб в двух точках, а вторая проходит через только одну

© СтатГрад 2019−2020 уч. г.

из его вершин, либо точка пересечения прямых лежит на стороне ромба, но не в его вершине. Рассмотрим эти случаи по отдельности.

1. Если нижняя или верхняя вершина лежит на прямой $y=1$, то $a=1+2{,}5=3{,}5$ или $a=1-2{,}5=-1{,}5$, а центр ромба удалён от прямой $x=1$ на $2{,}5$, поэтому прямая $x=1$ пересекает ромб в двух точках.

Если левая или правая вершина лежит на прямой $x=1$, то $a=1+5=6$ или $a=1-5=-4$, а центр ромба удалён от прямой $y=1$ на 5, поэтому прямая $y=1$ не пересекает ромб.

2. Точка пересечения прямых не должна совпасть с вершиной ромба, то есть $a\neq 1$. Подставим $x=1$, $y=1$ в уравнение:

$$3|a-1|=5, \quad \text{откуда } a=\frac{8}{3} \text{ или } a=-\frac{2}{3}.$$

Оба значения удовлетворяют условию $a\neq 1$, а потому при каждом из этих значений a система имеет ровно три решения.

Ответ: $-1{,}5$; $-\frac{2}{3}$; $\frac{8}{3}$; $3{,}5$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все значения *а*, но из-за арифметической ошибкиответ содержит неверное значение	3
С помощью верного рассуждения получены все значения *а*только для одного из случаев: одна из прямых пересекает ромб в двух точках, а вторая проходит через только одну из его вершин, или точка пересечения прямых лежит на стороне ромба, но не в его вершине	2
Задача верно сведена к исследованию возможного числа решений системы уравнений	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 а) Найдите хотя бы одно такое натуральное число n, что десятичная запись числа n^2+4n оканчивается всеми цифрами числа n, записанными в том же порядке.

б) Может ли такое число оканчиваться цифрой 1?

в) Найдите все такие четырёхзначные числа.

<u>Решение.</u>

а) Например, число 7.

б) Предположим, что $n=10k+1$. Тогда

$$n^2+4n=100k^2+20k+1+40k+4=10l+5,$$

т. е. десятичная запись числа n^2+4n оканчивается цифрой 5. Значит, такое невозможно.

в) Запишем условие задачи в таком виде: $n^2+4n=n+N\cdot 10000$ и преобразуем полученное уравнение:

$$n^2+3n=N\cdot 10000, \text{ т. е. } n\cdot(n+3)=2^4\cdot 5^4\cdot N.$$

Числа n и $(n+3)$ не могут одновременно делиться на 2 и не могут одновременно делиться на 5. Значит, один из множителей делится на 5^4 и один из множителей делится на 2^4. Эти два множителя могут совпадать только в том случае, если число n четырёхзначное, а $(n+3)$ делится на 10000, т. е. $n=9997$.

Если $n\neq 9997$, мы должны подобрать два числа, одно из которых делится на 16, а другое на 625 и одно из которых больше другого на 3.

Переберём нечётные четырёхзначные числа, кратные числу 625: 1875, 3125, 4375, 5625, 6875, 8125, 9375. Среди них только 1875 имеет вид $16k+3$ и только 8125 имеет вид $16k-3$.

Значит, искомое число равняется 1872, 8125 или 9997.

Ответ: а) 7; б) нет; в) 1872; 8125; 9997.

Содержание критерия	Баллы
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *б*, либо получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *в*	3
Получен верный обоснованный ответ в пункте *б*, пункты *а* и *в* не решены, либо получен верный обоснованный ответ в пункте *в*, пункты *а* и *б* не решены	2
Приведён пример в пункте *а*, пункты *б* и *в* не решены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4