Тренировочная работа №3 по МАТЕМАТИКЕ
11 класс

29 января 2020 года

Вариант МА1910310

(профильный уровень)

Выполнена: ФИО____ класс _______

Инструкция по выполнению работы

На выполнение работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий.

Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развёрнутым ответом.

Ответы к заданиям 1–12 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение на отдельном листе бумаги.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются.

Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Справочные материалы

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

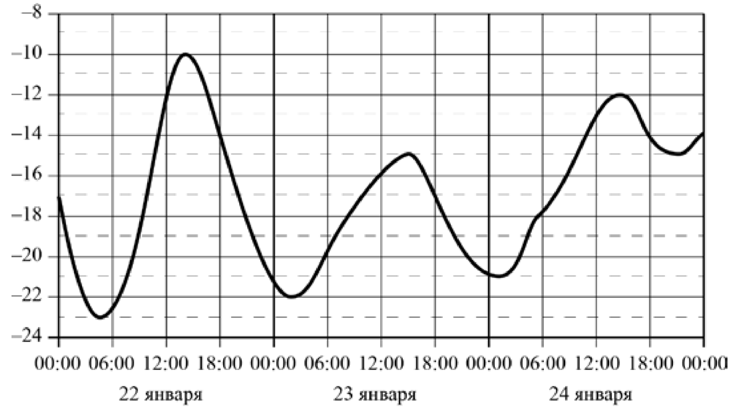
Часть 1

Ответом к каждому из заданий 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

1 При оплате услуг через платёжный терминал взимается комиссия 1 %. Терминал принимает суммы, кратные 10 рублям. Месячная плата за интернет составляет 350 рублей. Какую минимальную сумму нужно положить в приёмное устройство терминала, чтобы на счету фирмы, предоставляющей интернет-услуги, оказалась сумма, не меньшая 350 рублей?

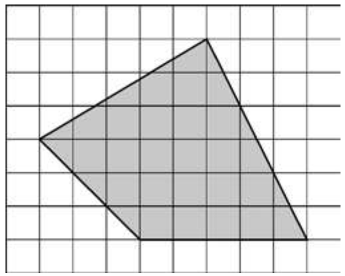
Ответ: ___________________________.

2 На рисунке показано изменение температуры воздуха на протяжении трёх суток. По горизонтали указывается дата и время, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Определите по рисунку наибольшую температуру воздуха 23 января. Ответ дайте в градусах Цельсия.



Ответ: ___________________________.

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён четырёхугольник. Найдите его площадь.



Ответ: ____________________________.

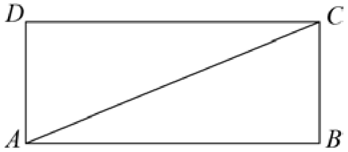
4 Научная конференция проводится в 4 дня. Всего запланировано 50 докладов — первые два дня по 11 докладов, остальные распределены поровну между третьим и четвёртым днями. На конференции планируется доклад профессора М. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Какова вероятность того, что доклад профессора М. окажется запланированным на последний день конференции?

Ответ: ____________________________.

5 Решите уравнение $\frac{7x}{2x^2-15}=1$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

Ответ: ____________________________.

6 Периметр прямоугольника равен 74, а площадь равна 36,5. Найдите диагональ этого прямоугольника.

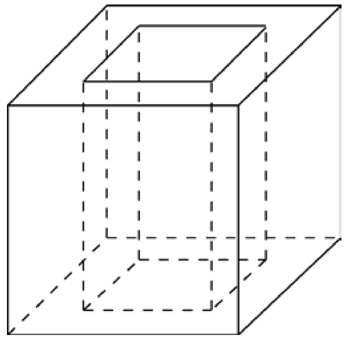


Ответ: ____________________________.

7 Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=\frac{1}{6}t^3-2t+1$, где x — расстояние от точки отсчёта в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения. В какой момент времени (в секундах) её скорость была равна 48 м/с?

Ответ: ____________________________.

8 Из единичного куба вырезана правильная четырёхугольная призма со стороной основания 0,5 и боковым ребром 1. Найдите площадь поверхности оставшейся части куба.



Ответ: ____________________________.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $\dfrac{\left(\sqrt{3}+\sqrt{11}\right)^2}{7+\sqrt{33}}$.

Ответ: ___________________________.

10 Для получения на экране увеличенного изображения лампочки в лаборатории используется собирающая линза с главным фокусным расстоянием $f=65$ см. Расстояние d_1 от линзы до лампочки может изменяться в пределах от 230 до 250 см, а расстояние d_2 от линзы до экрана — в пределах от 70 до 90 см. Изображение на экране будет чётким, если выполнено соотношение $\dfrac{1}{d_1}+\dfrac{1}{d_2}=\dfrac{1}{f}$. Укажите, на каком наименьшем расстоянии от линзы можно поместить лампочку, чтобы её изображение на экране было чётким. Ответ выразите в сантиметрах.

Ответ: ___________________________.

11 Грузовик перевозит партию щебня массой 90 тонн, ежедневно увеличивая норму перевозки на одно и то же число тонн. Известно, что за первый день было перевезено 2 тонны щебня. Определите, сколько тонн щебня было перевезено за десятый день, если вся работа была выполнена за 12 дней.

Ответ: ___________________________.

12 Найдите наименьшее значение функции $y=\left(x^2-39x+39\right)e^{2-x}$ на отрезке $[0;6]$.

Ответ: ___________________________.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $\dfrac{4^{\sin 2x}-2^{2\sqrt{3}\sin x}}{\sqrt{7\sin x}}=0$.

б) Найдите все его корни, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{13\pi}{2};-5\pi\right]$.

14 Дана прямая треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Известно, что $AB=BC$. Точка K — середина ребра A_1B_1, а точка M лежит на ребре AC и делит его в отношении $AM:MC=1:3$.

а) Докажите, что прямая KM перпендикулярна прямой AC.

б) Найдите расстояние между прямыми KM и A_1C_1, если $AB=10$, $AC=8$ и $AA_1=3$.

15 Решите неравенство $2^{|x|}-6-\dfrac{9\cdot 2^{|x|}-37}{4^{|x|}-7\cdot 2^{|x|}+12}\le\dfrac{1}{2^{|x|}-4}$.

16 Окружность проходит через вершины B и C треугольника ABC и пересекает AB и AC в точках C_1 и B_1 соответственно.

а) Докажите, что треугольник ABC подобен треугольнику AB_1C_1

б) Вычислите радиус данной окружности, если $\angle A=150°$, $BC=5\sqrt{5}$ и площадь треугольника AB_1C_1 в четыре раза меньше площади четырёхугольника BCB_1C_1.

17 По вкладу «А» банк в конце каждого года планирует увеличивать на 20 % сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу «Б» — увеличивать эту сумму на 11 % в первый год и на одинаковое целое число n процентов и за второй, и за третий годы. Найдите наименьшее значение n, при котором за три года хранения вклад «Б» окажется выгоднее вклада «А» при одинаковых суммах первоначальных взносов.

18 Найдите все значения a, при которых уравнение

$$\left(x^2+\sqrt{x-2a}\right)^2=\left(1-2x+\sqrt{x-2a}\right)^2$$

имеет единственное решение на отрезке $[-1;1]$.

19 Конечная возрастающая последовательность $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ состоит из $n\ge 3$ различных натуральных чисел, причём при всех натуральных $k\le n-2$ выполнено равенство $4a_{k+2}=7a_{k+1}-3a_k$.

а) Приведите пример такой последовательности при $n=5$.

б) Может ли в такой последовательности при некотором $n\ge 3$ выполняться равенство $a_n=4a_2-3a_1$?

в) Какое наименьшее значение может принимать a_1, если $a_n=527$?

math100.ru

Ответы на тренировочные варианты 1910309-1910312 (профильный уровень) от 29.01.2020

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1910309	590	7	17,5	0,2	7	4	15	7,92	6	117	19	- 10
1910310	360	- 15	27	0,28	5	36	10	7,5	2	234	11	- 35
1910311	21	2	40,5	0,441	15	108	35	25	56	6,25	15	8
1910312	24	1	22,5	0,336	- 5	240	38	5	12	8	16	53

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

13 а) Решите уравнение $\dfrac{4^{\sin 2x}-2^{2\sqrt{3}\sin x}}{\sqrt{7\sin x}}=0$.

б) Найдите все его корни, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{13\pi}{2};-5\pi\right]$.

Решение.

а) Перейдём к системе:

$$\begin{cases}4^{\sin 2x}-2^{2\sqrt{3}\sin x}=0,\\ \sin x>0.\end{cases}$$

Значит,

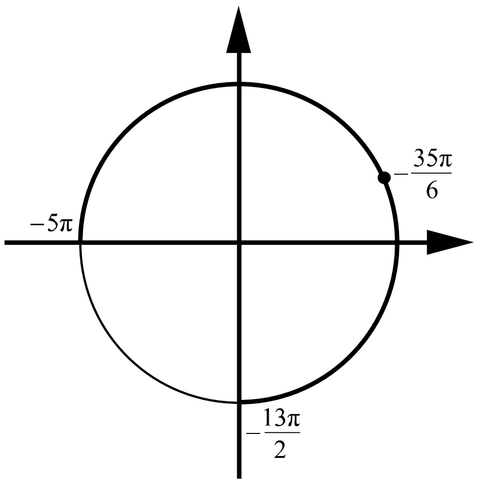
$$\begin{cases}2^{4\sin x\cos x}=2^{2\sqrt{3}\sin x},\\ \sin x>0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}\cos x=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\\ \sin x>0.\end{cases}$$

Получим $x=\dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни на отрезке $\left[-\dfrac{13\pi}{2};-5\pi\right]$.

Получим $x=-\dfrac{35\pi}{6}$.



Ответ: а) $\dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; б) $-\dfrac{35\pi}{6}$.

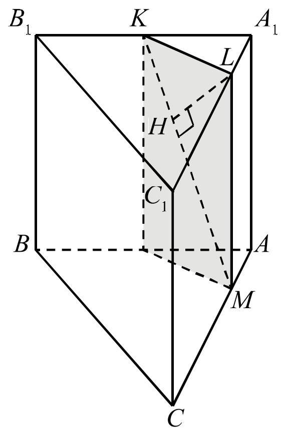
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14 Дана прямая треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Известно, что $AB=BC$. Точка K — середина ребра A_1B_1, а точка M лежит на ребре AC и делит его в отношении $AM:MC=1:3$.

а) Докажите, что прямая KM перпендикулярна прямой AC.

б) Найдите расстояние между прямыми KM и A_1C_1, если $AB=10$, $AC=8$ и $AA_1=3$.

Решение.



а) Пусть точка L лежит на ребре A_1C_1 и делит его в отношении $A_1L:LC_1=1:3$. Поскольку треугольник ABC равнобедренный, треугольник $A_1B_1C_1$ тоже равнобедренный. Следовательно, отрезок KL перпендикулярен стороне A_1C_1. Отрезок ML тоже перпендикулярен стороне A_1C_1. Получаем, что прямая A_1C_1 перпендикулярна плоскости KLM, то есть прямая KM перпендикулярна прямой A_1C_1, а следовательно, и прямой AC.

б) Пусть LH — высота треугольника KLM. Так как прямая A_1C_1 перпендикулярна плоскости KLM, расстояние между прямыми KM и A_1C_1 равно LH. Имеем

$$KL = \sqrt{\left(\frac{AB}{2}\right)^2 - \left(\frac{AC}{4}\right)^2} = \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21};\ LM = AA_1 = 3;$$

$$KM = \sqrt{KL^2 + LM^2} = \sqrt{21+9} = \sqrt{30}.$$

Тогда $KL \cdot LM = KM \cdot LH$; $LH = \dfrac{KL \cdot LM}{KM} = \dfrac{\sqrt{21} \cdot 3}{\sqrt{30}} = \dfrac{3\sqrt{70}}{10}$.

Ответ: б) $\dfrac{3\sqrt{70}}{10}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство $2^{|x|} - 6 - \dfrac{9 \cdot 2^{|x|} - 37}{4^{|x|} - 7 \cdot 2^{|x|} + 12} \le \dfrac{1}{2^{|x|} - 4}$.

Решение.

Сделаем замену $y = 2^{|x|}$.

Получим

$y - 6 - \dfrac{9y - 37}{y^2 - 7y + 12} \le \dfrac{1}{y-4}$;

$y - 6 - \dfrac{9y - 37 + y - 3}{(y-3)(y-4)} \le 0$;

$y - 6 - 10\dfrac{y-4}{(y-3)(y-4)} \le 0$;

$\dfrac{(y-8)(y-1)(y-4)}{(y-3)(y-4)} \le 0$;

$-\infty < y \le 1$; $3 < y < 4$; $4 < y \le 8$.

После обратной замены получаем $-3 \le x < -2$; $-2 < x < -\log_2 3$; $x = 0$; $\log_2 3 < x < 2$; $2 < x \le 3$.

Ответ: $[-3; -2)$; $(-2; -\log_2 3)$; $\{0\}$; $(\log_2 3; 2)$; $(2; 3]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

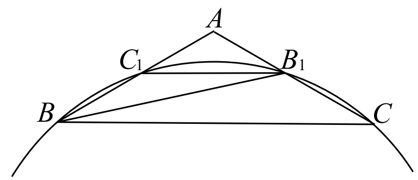
16 Окружность проходит через вершины B и C треугольника ABC и пересекает AB и AC в точках C_1 и B_1 соответственно.

а) Докажите, что треугольник ABC подобен треугольнику AB_1C_1

б) Вычислите радиус данной окружности, если $\angle A = 150°$, $BC = 5\sqrt{5}$ и площадь треугольника AB_1C_1 в четыре раза меньше площади четырёхугольника BCB_1C_1.

Решение.

а) Заметим, что $\angle AB_1C_1 + \angle C_1B_1C = 180°$. Четырёхугольник BCB_1C_1 вписан в окружность, поэтому $\angle C_1BC + \angle C_1B_1C = 180°$. Значит, $\angle AB_1C_1 = \angle C_1BC = \angle ABC$. Следовательно, треугольники ABC и AB_1C_1 подобны по двум углам.



б) Площадь треугольника AB_1C_1 в четыре раза меньше площади четырёхугольника BCB_1C_1, поэтому площадь треугольника ABC в пять раз больше площади треугольника AB_1C_1 и коэффициент подобия этих треугольников равен $\sqrt{5}$.

Пусть $AB_1 = x$, тогда $AB = \sqrt{5}x$. Найдём BB_1 по теореме косинусов из треугольника ABB_1:

$$BB_1^2 = x^2 + 5x^2 - 2x \cdot \sqrt{5}x \cdot \cos 150° = x^2\left(6 + \sqrt{15}\right).$$ Следовательно,

$$BB_1 = \sqrt{6 + \sqrt{15}}\,x.$$

Теперь по теореме синусов из треугольника ABB_1 получаем

$$\frac{AB}{\sin \angle AB_1B} = \frac{BB_1}{\sin \angle A}; \qquad \sin \angle AB_1B = \frac{AB}{BB_1}\sin \angle A.$$

Но $\sin\angle AB_1B=\sin\angle BB_1C$, поскольку синусы смежных углов равны.
Получаем

$$\sin\angle BB_1C=\frac{AB}{BB_1}\sin\angle A=\frac{\sqrt{5}x}{\sqrt{6+\sqrt{15}}\,x}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{6+\sqrt{15}}}.$$

Теперь находим радиус окружности, описанной около треугольника BCB_1:

$$2R=\frac{BC}{\sin\angle BB_1C}=\frac{5\sqrt{5}\cdot2\sqrt{6+\sqrt{15}}}{\sqrt{5}}=10\sqrt{6+\sqrt{15}};\ R=5\sqrt{6+\sqrt{15}}.$$

Ответ: б) $5\sqrt{6+\sqrt{15}}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 По вкладу «А» банк в конце каждого года планирует увеличивать на 20 % сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу «Б» — увеличивать эту сумму на 11 % в первый год и на одинаковое целое число n процентов и за второй, и за третий годы. Найдите наименьшее значение n, при котором за три года хранения вклад «Б» окажется выгоднее вклада «А» при одинаковых суммах первоначальных взносов.

Решение.

Пусть на каждый тип вклада была внесена одинаковая сумма S. На вкладе «А» каждый год сумма увеличивается на 20 %, т. е. умножается на коэффициент 1,2. Поэтому через три года сумма на вкладе «А» будет равна

$$1{,}2^3S=1{,}728S.$$

Аналогично сумма на вкладе «Б» будет равна

$$1{,}11\cdot\left(1+\frac{n}{100}\right)^2S,$$

где n — некоторое натуральное число.
По условию требуется найти наименьшее натуральное решение неравенства

$$1{,}11\cdot\left(1+\frac{n}{100}\right)^2S>1{,}728S,$$

$$\left(1+\frac{n}{100}\right)^2>\frac{1728}{1110}=1{,}55\ldots$$

При $n=25$ неравенство

$$1{,}25^2>1{,}55\ldots;\quad 1{,}5625>1{,}55\ldots$$

верно, а при $n=24$ неравенство

$$1{,}24^2>1{,}55\ldots;\quad 1{,}5376>1{,}55\ldots$$

неверно, как и при всех меньших n.
Ответ: 25.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Верно построена математическая модель, и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения a, при которых уравнение

$$\left(x^2+\sqrt{x-2a}\right)^2=\left(1-2x+\sqrt{x-2a}\right)^2$$

имеет единственное решение на отрезке $[-1;1]$.

Решение.

Равенство $\left(x^2+\sqrt{x-2a}\right)^2=\left(1-2x+\sqrt{x-2a}\right)^2$ имеет место тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одно из равенств

$$x^2+\sqrt{x-2a}=1-2x+\sqrt{x-2a}\ \text{или}\ x^2+\sqrt{x-2a}=-1+2x-\sqrt{x-2a}.$$

Уравнение $x^2+\sqrt{x-a}=-1+2x-\sqrt{x-a}$ равносильно уравнению $(x-1)^2+2\sqrt{x-2a}=0$. Оно имеет единственное решение $x=1$ на отрезке

$\left[-1;1\right]$ при $a=\dfrac{1}{2}$ и не имеет решений на этом отрезке при других значениях параметра a.

Уравнение $x^2+\sqrt{x-2a}=1-2x+\sqrt{x-2a}$ равносильно системе $\begin{cases}x^2+2x-1=0,\\ x-2a\ge 0.\end{cases}$ Эта система имеет единственное решение $x=\sqrt{2}-1$ на отрезке $\left[-1;1\right]$ при $a\le\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$ и не имеет решений на этом отрезке при других значениях параметра a.

Поскольку $\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}<\dfrac{1}{2}$, уравнение $\left(x^2+\sqrt{x-2a}\right)^2=\left(1-2x+\sqrt{x-2a}\right)^2$ имеет единственное решение на отрезке $\left[-1;1\right]$ при $a=\dfrac{1}{2}$ и $a\le\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$.

Ответ: $a\le\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$; $a=\dfrac{1}{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все значения *a*, но нет обоснования, почему в ответе учитываются и точка, и интервал	3
С помощью верного рассуждения получено решение уравнения для одного из случаев	2
Задача верно сведена к исследованию возможного значения корней уравнения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 Конечная возрастающая последовательность $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ состоит из $n\ge 3$ различных натуральных чисел, причём при всех натуральных $k\le n-2$ выполнено равенство $4a_{k+2}=7a_{k+1}-3a_k$.

а) Приведите пример такой последовательности при $n=5$.

б) Может ли в такой последовательности при некотором $n\ge 3$ выполняться равенство $a_n=4a_2-3a_1$?

в) Какое наименьшее значение может принимать a_1, если $a_n=527$?

Решение.

а) Например, подходит последовательность 1, 65, 113, 149, 176.

б) При всех натуральных $k\le n-1$ положим $b_k=a_{k+1}-a_k$. Тогда равенство $4a_{k+2}=7a_{k+1}-3a_k$ равносильно равенству $4b_{k+1}=3b_k$. Следовательно,

последовательность b_k при $1\le k\le n-1$ образует геометрическую прогрессию со знаменателем $q=\dfrac{3}{4}$.

Имеем

$$a_n=a_1+b_1+b_2+\ldots+b_{n-1}=a_1+\frac{b_1\left(1-q^{n-1}\right)}{1-q}<a_1+\frac{b_1}{1-q}=a_1+4b_1=4a_2-3a_1.$$

Значит, равенство $a_n=4a_2-3a_1$ ни при каком $n\ge 3$ выполняться не может.

в) Как доказано в решении пункта б, последовательность $b_k=a_{k+1}-a_k$ при $1\le k\le n-1$ образует геометрическую прогрессию со знаменателем $q=\dfrac{3}{4}$.

Имеем $527=a_n=a_1+\dfrac{b_1(1-q^{n-1})}{1-q}=a_1+\dfrac{b_1(4^{n-1}-3^{n-1})}{4^{n-2}}$. Следовательно, b_1 делится на 4^{n-2}, а a_1 даёт при делении на $4^{n-1}-3^{n-1}$ тот же остаток, что и число 527. Так как $4^5=1024>527>b_1\ge 4^{n-2}$, получаем, что $n\le 6$. Остатки при делении числа 527 на $4^2-3^2=7$, $4^3-3^3=37$, $4^4-3^4=175$ и $4^5-3^5=781$ соответственно равны 2, 9, 2 и 527. Значит, a_1 не может быть меньше 2.

Пример последовательности 2, 194, 338, 446, 527 показывает, что a_1 может равняться 2.

Ответ: а) Например, последовательность 1, 65, 113, 149, 176; б) нет; в) 2.

Содержание критерия	Баллы
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *б*, либо получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *в*	3
Получен верный обоснованный ответ в пункте *б*, пункты *а* и *в* не решены, либо получен верный обоснованный ответ в пункте *в*, пункты *а* и *б* не решены	2
Приведён пример в пункте *а*, пункты *б* и *в* не решены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4