

Тренировочная работа №3 по МАТЕМАТИКЕ**11 класс**

29 января 2020 года

Вариант МА1910311

(профильный уровень)

Выполнена: ФИО _____ класс _____

Инструкция по выполнению работы

На выполнение работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий.

Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развёрнутым ответом.

Ответы к заданиям 1–12 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение на отдельном листе бумаги.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются.

Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

*Желаем успеха!***Справочные материалы**

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

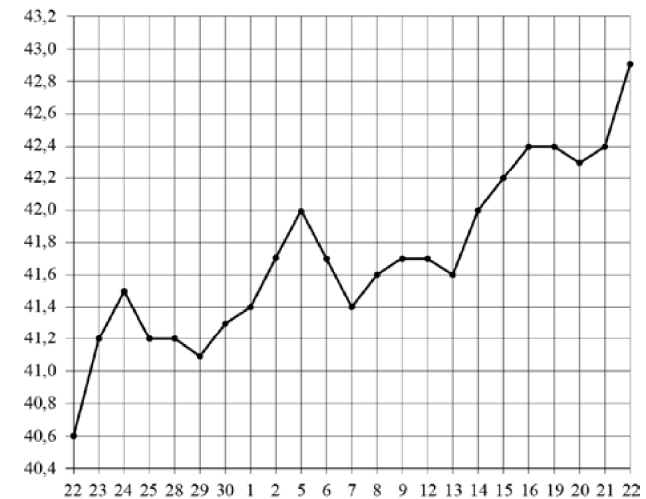
Часть 1

Ответом к каждому из заданий 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

- 1 Футболка стоила 800 рублей. После снижения цены она стала стоить 632 рубля. На сколько процентов была снижена цена на футболку?

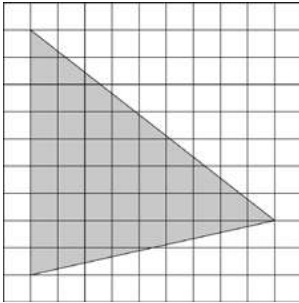
Ответ: _____.

- 2 На рисунке жирными точками показан курс евро, установленный Центробанком РФ, во все рабочие дни с 22 сентября по 22 октября 2010 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена евро в рублях. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, сколько дней за указанный период курс евро был ровно 41,4 рубля.



Ответ: _____.

- 3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник. Найдите его площадь.



Ответ: _____.

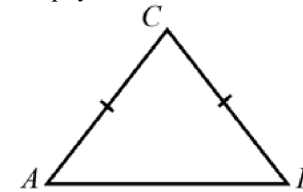
- 4 Чтобы поступить в институт на специальность «Лингвистика», абитуриент должен набрать на ЕГЭ не менее 64 баллов по каждому из трёх предметов — математика, русский язык и иностранный язык. Чтобы поступить на специальность «Социология», нужно набрать не менее 64 баллов по каждому из трёх предметов — математика, русский язык и обществознание. Вероятность того, что абитуриент Б. получит не менее 64 баллов по математике, равна 0,5, по русскому языку — 0,9, по иностранному языку — 0,8 и по обществознанию — 0,9. Найдите вероятность того, что Б. сможет поступить на одну из двух упомянутых специальностей.

Ответ: _____.

- 5 Найдите корень уравнения $\frac{x-59}{x-4} = -4$.

Ответ: _____.

- 6 Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 15, а основание равно 18. Найдите площадь этого треугольника.

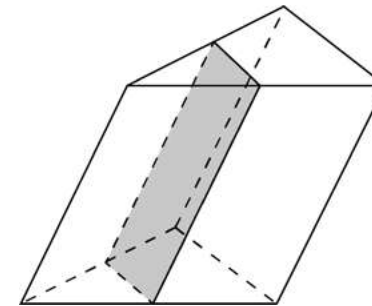


Ответ: _____.

- 7 Прямая $y = 7x + 1$ является касательной к графику функции $7x^2 + bx + 29$. Найдите b , учитывая, что абсцисса точки касания меньше 0.

Ответ: _____.

- 8 Площадь боковой поверхности треугольной призмы равна 50. Через среднюю линию основания призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите площадь боковой поверхности отсечённой треугольной призмы.



Ответ: _____.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $14^{-0,6} \cdot 7^{1,6} : 2^{-3,6}$.

Ответ: _____.

10 В телевизоре ёмкость высоковольтного конденсатора составляет $C = 5 \cdot 10^{-6}$ Ф. Параллельно с конденсатором подключён резистор с сопротивлением $R = 2 \cdot 10^6$ Ом. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе составляет $U_0 = 25$ кВ. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения U (кВ) за время, определяемое выражением $t = \alpha RC \log_2 \frac{U_0}{U}$ (с), где $\alpha = 2,3$ — постоянная.

Определите напряжение на конденсаторе, если после выключения телевизора прошло 46 с. Ответ дайте в киловольтах.

Ответ: _____.

11 Заказ на изготовление 210 деталей первый рабочий выполняет на 1 час быстрее, чем второй. Сколько деталей за час изготавливает первый рабочий, если известно, что он за час изготавливает на 1 деталь больше второго?

Ответ: _____.

12 Найдите наименьшее значение функции $y = 12 \sin x - 17x + 8$ на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

Ответ: _____.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $\sin \frac{7x}{2} \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{7x}{2} \cos \frac{x}{2} = \cos^2 3x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.

14 Точки P и Q — середины рёбер AD и CC_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ соответственно.

а) Докажите, что прямые B_1P и QB перпендикулярны.

б) Найдите площадь сечения куба плоскостью, проходящей через точку P и перпендикулярной прямой BQ , если ребро куба равно 6.

15 Решите неравенство $\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x+1)(x+2)(x+3)} > 1$.

16 На диаметре AB окружности с центром O взята точка O_1 . Построена вторая окружность с центром в точке O_1 радиусом O_1B . Луч с началом в точке A касается второй окружности в точке C и пересекает первую окружность в точке D .

а) Докажите, что прямые O_1C и BD параллельны.

б) Прямая O_1C пересекает окружность с диаметром AB в точках P и Q (точка P лежит на дуге ADB). Найдите площадь четырёхугольника $PDBQ$, если окружности касаются внутренним образом в точке B , а их радиусы равны 40 и 30 соответственно.

- 17 В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на три года в размере S млн рублей, где S — **целое** число. Условия его возврата таковы:
- каждый январь долг увеличивается на 30 % по сравнению с концом предыдущего года;
 - с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
 - в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2020	Июль 2021	Июль 2022	Июль 2023
Долг (в млн рублей)	S	$0,6S$	$0,25S$	0

Найдите наибольшее значение S , при котором каждая из выплат будет меньше 5 млн рублей.

- 18 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{x^4 - 16x^2 + 64a^2} = x^2 + 4x - 8a$$

имеет ровно 3 решения.

- 19 На доске в одну строку слева направо написаны n натуральных чисел, причём каждое следующее из них является квадратом предыдущего.
- а) Могли ли при $n = 3$ на доске быть написаны ровно 14 цифр (например, если на доске написаны числа 5, 25 и 625, то написаны ровно 6 цифр)?
 - б) Могли ли при $n = 3$ на доске быть написаны ровно 8 цифр?
 - в) Какое самое маленькое число может быть написано на доске при $n = 4$, если на доске написано ровно 20 цифр?

math100.ru

Ответы на тренировочные варианты 1910309-1910312 (профильный уровень) от
29.01.2020

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1910309	590	7	17,5	0,2	7	4	15	7,92	6	117	19	- 10
1910310	360	- 15	27	0,28	5	36	10	7,5	2	234	11	- 35
1910311	21	2	40,5	0,441	15	108	35	25	56	6,25	15	8
1910312	24	1	22,5	0,336	- 5	240	38	5	12	8	16	53

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

13

- а) Решите уравнение $\sin \frac{7x}{2} \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{7x}{2} \cos \frac{x}{2} = \cos^2 3x$.
- б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{3\pi}{2} \right]$.

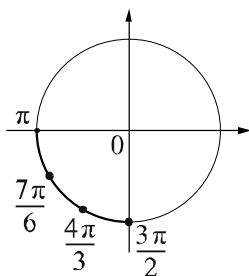
Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде

$$\cos\left(\frac{7x}{2} - \frac{x}{2}\right) = \cos^2 3x; \cos^2 3x - \cos 3x = 0; \cos 3x(\cos 3x - 1) = 0.$$

Значит, $\cos 3x = 0$ или $\cos 3x = 1$, следовательно, $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}n$ или $x = \frac{2\pi}{3}k$, $n, k \in \mathbb{Z}$.

б) Корни, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{3\pi}{2} \right]$, отберём с помощью единичной окружности.



Получаем $\frac{7\pi}{6}; \frac{4\pi}{3}; \frac{3\pi}{2}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}n, \frac{2\pi}{3}k, k, n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{7\pi}{6}; \frac{4\pi}{3}; \frac{3\pi}{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а или в пункте б. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

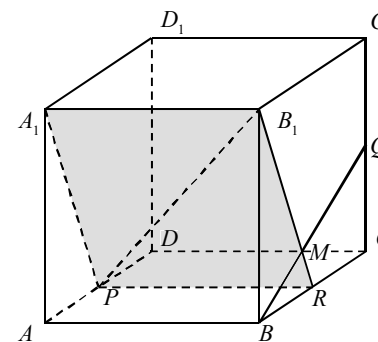
14

Точки P и Q — середины рёбер AD и CC_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ соответственно.

- а) Докажите, что прямые B_1P и QB перпендикулярны.
- б) Найдите площадь сечения куба плоскостью, проходящей через точку P и перпендикулярной прямой BQ , если ребро куба равно 6.

Решение.

а) Проведём отрезок B_1R , параллельный A_1P . Пусть M — точка пересечения отрезков B_1R и QB . Треугольник BMR прямоугольный с прямым углом при вершине M . Это следует из равенства треугольников RB_1B и QBC . Значит, прямые QB и B_1R перпендикулярны. Прямые QB и PR перпендикулярны, так как прямая PR перпендикулярна плоскости BCC_1 . Поэтому прямая QB перпендикулярна плоскости A_1B_1P , и, следовательно, прямая QB перпендикулярна прямой B_1P .



б) Указанное сечение — прямоугольник A_1B_1RP . Его площадь равна $A_1B_1 \cdot A_1P = 18\sqrt{5}$.

Ответ: б) $18\sqrt{5}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, и обоснованно получен верный ответ в пункте б	2
Верно доказан пункт а. ИЛИ Верно решён пункт б при отсутствии обоснований в пункте а	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

15

Решите неравенство $\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x+1)(x+2)(x+3)} > 1$.

Решение.

Запишем исходное неравенство в виде

$$\frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{(x+1)(x+2)(x+3)} - 1 > 0; \quad \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6 - (x^3 + 6x^2 + 11x + 6)}{(x+1)(x+2)(x+3)} > 0;$$

$$\frac{-12x^2 - 12}{(x+1)(x+2)(x+3)} > 0; \quad \frac{x^2 + 1}{(x+1)(x+2)(x+3)} < 0, \text{ откуда } x < -3, \quad -2 < x < -1.$$

Ответ: $(-\infty; -3); (-2; -1)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

16

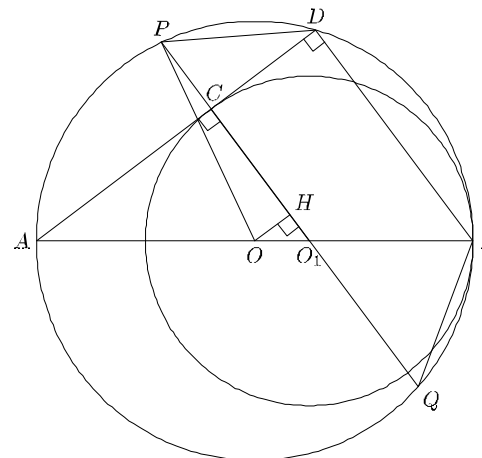
На диаметре AB окружности с центром O взята точка O_1 . Построена вторая окружность с центром в точке O_1 радиусом O_1B . Луч с началом в точке A касается второй окружности в точке C и пересекает первую окружность в точке D .

а) Докажите, что прямые O_1C и BD параллельны.

б) Прямая O_1C пересекает окружность с диаметром AB в точках P и Q (точка P лежит на дуге ADB). Найдите площадь четырёхугольника $PDBQ$, если окружности касаются внутренним образом в точке B , а их радиусы равны 40 и 30 соответственно.

Решение.

а) Точка D лежит на окружности с диаметром AB , поэтому BD перпендикулярна AD . Прямая AD касается второй окружности в точке C , поэтому O_1C перпендикулярна AD . Прямые BD и O_1C перпендикулярны одной и той же прямой, следовательно, они параллельны.



б) Из того, что точка O_1 лежит на отрезке AB , а радиус второй окружности меньше радиуса первой, следует, что точка O_1 лежит на отрезке OB . В прямоугольном треугольнике ACO_1 известны катет $CO_1 = 30$ и гипотенуза $AO_1 = AB - O_1B = 80 - 30 = 50$. По теореме Пифагора находим, что $AC = 40$. Треугольник ADB подобен треугольнику ACO_1 с коэффициентом $\frac{AB}{AO_1} = \frac{8}{5}$,

поэтому $BD = \frac{8}{5}CO_1 = \frac{8}{5} \cdot 30 = 48$.

Пусть H — проекция точки O на прямую PQ . Тогда H — середина хорды PQ , а так как треугольник OHO_1 подобен треугольнику ACO_1 с коэффициентом

$$\frac{OO_1}{AO_1} = \frac{AO_1 - AO}{AO_1} = \frac{50 - 40}{50} = \frac{1}{5},$$

получаем, что $OH = \frac{1}{5}AC = 8$.

Из прямоугольного треугольника OHP находим, что

$$HP = \sqrt{OP^2 - OH^2} = \sqrt{1600 - 64} = 16\sqrt{6}.$$

Тогда $PQ = 2HP = 32\sqrt{6}$.

Четырёхугольник $PDBQ$ — равнобедренная трапеция с основаниями $PQ = 32\sqrt{6}$, $BD = 48$ и высотой CD . По теореме о пропорциональных отрезках $\frac{CD}{AC} = \frac{BO_1}{AO_1} = \frac{3}{5}$, откуда $CD = \frac{3}{5}AC = \frac{3}{5} \cdot 40 = 24$.

Следовательно,

$$S_{PDVQ} = \frac{BD + PQ}{2} \cdot CD = \frac{48 + 32\sqrt{6}}{2} \cdot 24 = 192(3 + 2\sqrt{6}).$$

Ответ: б) $192(3 + 2\sqrt{6})$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> , и обоснованно получен верный ответ в пункте <i>б</i>	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте <i>б</i> . ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> , и при обоснованном решении пункта <i>б</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> . ИЛИ При обоснованном решении пункта <i>б</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте <i>б</i> с использованием утверждения пункта <i>a</i> , при этом пункт <i>a</i> не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

- 17 В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на три года в размере S млн рублей, где S — **целое** число. Условия его возврата таковы: — каждый январь долг увеличивается на 30 % по сравнению с концом предыдущего года; — с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга; — в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2020	Июль 2021	Июль 2022	Июль 2023
Долг (в млн рублей)	S	$0,6S$	$0,25S$	0

Найдите наибольшее значение S , при котором каждая из выплат будет меньше 5 млн рублей.

Решение.

В январе 2021 года долг будет составлять $1,3S$ млн рублей, а в июле 2021 года — $0,6S$ млн рублей. Значит, выплата в 2021 году составит $0,7S$ млн рублей.

В январе 2022 года долг будет составлять $1,3 \cdot 0,6S = 0,78S$ млн рублей, а в июле 2022 года — $0,25S$ млн рублей. Значит, выплата в 2022 году составит $0,53S$ млн рублей.

В январе 2023 года долг перед банком составит $1,3 \cdot 0,25S = 0,325S$, а в июле — 0 рублей. Значит, выплата в 2023 году составит $0,325S$ млн рублей.

Решим систему:

$$\begin{cases} 0,7S < 5, \\ 0,53S < 5, \\ 0,325S < 5 \end{cases} \quad \begin{cases} S < 7,14\dots, \\ S < 9,43\dots, \\ S < 15,38\dots \end{cases}$$

Наибольшее целое решение этой системы — $S = 7$ млн рублей.

Ответ: 7.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Верно построена математическая модель, и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

- 18 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{x^4 - 16x^2 + 64a^2} = x^2 + 4x - 8a$$

имеет ровно 3 решения.

Решение.

Перейдём к системе:

$$\begin{cases} x^4 - 16x^2 + 64a^2 = x^4 + 16x^2 + 64a^2 + 8x^3 - 16ax^2 - 64ax, \\ x^2 + 4x - 8a \geq 0, \\ \begin{cases} 2ax(x + 4) = x^2(x + 4), \\ x^2 + 4x - 8a \geq 0. \end{cases} \end{cases}$$

Уравнение имеет корни $x = 0$ и $x = -4$ при любых значениях a и ещё один корень $x = 2a$, который не должен совпадать с двумя другими. Значит, $a \neq -2$ и $a \neq 0$. При этом должно выполняться неравенство $x^2 + 4x - 8a \geq 0$.

Получаем

$$\begin{cases} (-4)^2 - 16 - 8a \geq 0, \\ 0^2 + 0 - 8a \geq 0, \\ 4a^2 + 8a - 8a \geq 0; \\ a \leq 0, \\ a^2 \geq 0, \end{cases}$$

откуда $a \leq 0$.

Ответ: $a < -2$, $-2 < a < 0$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все значения a , но ответ содержит лишнее значение	3
С помощью верного рассуждения получены все решения уравнения	2
Задача верно сведена к исследованию возможного значения корней уравнения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

- 19 На доске в одну строку слева направо написаны n натуральных чисел, причём каждое следующее из них является квадратом предыдущего.
- а) Могли ли при $n = 3$ на доске быть написаны ровно 14 цифр (например, если на доске написаны числа 5, 25 и 625, то написаны ровно 6 цифр)?
- б) Могли ли при $n = 3$ на доске быть написаны ровно 8 цифр?
- в) Какое самое маленькое число может быть написано на доске при $n = 4$, если на доске написано ровно 20 цифр?

Решение.

- а) Да. Например, если написаны числа 80, 6400 и 40 960 000.
- б) Предположим, что это возможно. Если второе из написанных чисел меньше 100, то первое из этих чисел меньше 10, а третье меньше 10 000. Значит, в этом случае на доске написаны не больше $1 + 2 + 4 = 7$ цифр. Если второе из написанных чисел не меньше 100, то первое из этих чисел не меньше 10, а третье не меньше 10 000. Следовательно, в этом случае на доске написаны не меньше $2 + 3 + 5 = 10$ цифр. Во всех случаях пришли к противоречию. Значит, на доске не могли быть написаны ровно 8 цифр при $n = 3$.

в) Самое маленькое написанное на доске число — первое. Если оно не больше 13, то второе число не больше 169, третье число не больше $169^2 < 170^2 = 289 \cdot 10^2$, а четвёртое число меньше $(289 \cdot 10^2)^2 < (3 \cdot 10^4)^2 = 9 \cdot 10^8$. Значит, в этом случае на доске написаны не больше $2 + 3 + 5 + 9 = 19$ цифр.

Если первое число равно 14, то второе число равно $14^2 = 196$, третье число больше $190^2 = 36100 > 35 \cdot 10^3$ и меньше $200^2 = 4 \cdot 10^4$, четвёртое число больше $O_1 C$ и меньше AB . Следовательно, в этом случае на доске написаны ровно P цифр.

Значит, самое маленькое число, которое может быть написано на доске при Q , если на доске написано ровно 20 цифр, — это 14.

Ответ: а) Да; б) нет; в) 14.

Содержание критерия	Баллы
Получены верные обоснованные ответы в пунктах a , b и v	4
Получены верные обоснованные ответы в пунктах a и b , либо получены верные обоснованные ответы в пунктах a и v	3
Получен верный обоснованный ответ в пункте b , пункты a и v не решены, либо получен верный обоснованный ответ в пункте v , пункты a и b не решены	2
Приведён пример в пункте a , пункты b и v не решены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4