Тренировочная работа №3 по МАТЕМАТИКЕ
11 класс
29 января 2020 года
Вариант МА1910312
(профильный уровень)

Выполнена: ФИО_________________________________ класс _______

Инструкция по выполнению работы

На выполнение работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий.

Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развёрнутым ответом.

Ответы к заданиям 1–12 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение на отдельном листе бумаги.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются.

Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Справочные материалы

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$
$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

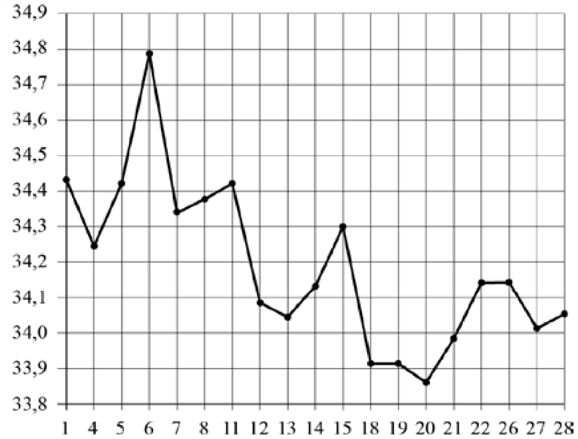
Часть 1

Ответом к каждому из заданий 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

1 Футболка стоила 700 рублей. После снижения цены она стала стоить 532 рубля. На сколько процентов была снижена цена на футболку?

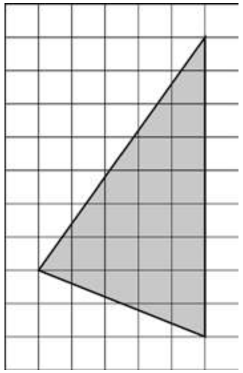
Ответ: ___________________________.

2 На рисунке жирными точками показан курс евро, установленный Центробанком РФ, во все рабочие дни с 1 февраля по 28 февраля 2002 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена евро в рублях. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, сколько дней за указанный период курс евро был ровно 34,3 рубля.



Ответ: ___________________________.

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник. Найдите его площадь.



Ответ: ____________________________.

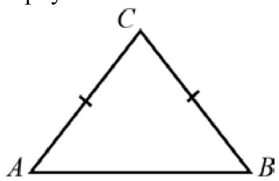
4 Чтобы поступить в институт на специальность «Переводчик», абитуриент должен набрать на ЕГЭ не менее 61 балла по каждому из трёх предметов — математика, русский язык и иностранный язык. Чтобы поступить на специальность «Социология», нужно набрать не менее 61 балла по каждому из трёх предметов — математика, русский язык и обществознание.
Вероятность того, что абитуриент О. получит не менее 61 балла по математике, равна 0,6, по русскому языку — 0,7, по иностранному языку — 0,5 и по обществознанию — 0,6.
Найдите вероятность того, что О. сможет поступить на одну из двух упомянутых специальностей.

Ответ: ____________________________.

5 Найдите корень уравнения $\dfrac{x+17}{x+1}=-3$.

Ответ: ____________________________.

6 Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 26, а основание равно 48. Найдите площадь этого треугольника.

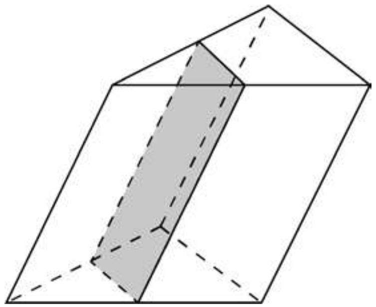


Ответ: ____________________________.

7 Прямая $y=8x+3$ является касательной к графику функции $15x^2+bx+18$. Найдите b, учитывая, что абсцисса точки касания меньше 0.

Ответ: ____________________________.

8 Площадь боковой поверхности треугольной призмы равна 10. Через среднюю линию основания призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите площадь боковой поверхности отсечённой треугольной призмы.



Ответ: ____________________________.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $12^{3,2} \cdot 6^{-2,2} : 2^{2,2}$.

Ответ: ___________________________.

10 В телевизоре ёмкость высоковольтного конденсатора составляет $C = 2 \cdot 10^{-6}$ Ф. Параллельно с конденсатором подключён резистор с сопротивлением $R = 3 \cdot 10^{6}$ Ом. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе составляет $U_0 = 16$ кВ. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения U (кВ) за время, определяемое выражением $t = \alpha RC \log_2 \frac{U_0}{U}$ (с), где $\alpha = 1,4$ — постоянная. Определите напряжение на конденсаторе, если после выключения телевизора прошло 8,4 с. Ответ дайте в киловольтах.

Ответ: ___________________________.

11 Заказ на изготовление 240 деталей первый рабочий выполняет на 1 час быстрее, чем второй. Сколько деталей за час изготавливает первый рабочий, если известно, что он за час изготавливает на 1 деталь больше второго?

Ответ: ___________________________.

12 Найдите наименьшее значение функции $y = 79\sin x - 81x + 53$ на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

Ответ: ___________________________.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $\sin\frac{5x}{2}\sin\frac{3x}{2} + \cos\frac{5x}{2}\cos\frac{3x}{2} = 2\cos^2 x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

14 Точки P и Q — середины рёбер AD и CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ соответственно.

а) Докажите, что прямые B_1P и QB перпендикулярны.

б) Найдите площадь сечения куба плоскостью, проходящей через точку P и перпендикулярной прямой BQ, если ребро куба равно 10.

15 Решите неравенство $\frac{(x-2)(x-4)(x-7)}{(x+2)(x+4)(x+7)} > 1$.

16 На диаметре AB окружности с центром O взята точка O_1. Построена вторая окружность с центром в точке O_1 радиусом O_1B. Луч с началом в точке A касается второй окружности в точке C и пересекает первую окружность в точке D.

а) Докажите, что прямые O_1C и BD параллельны.

б) Прямая O_1C пересекает окружность с диаметром AB в точках P и Q (точка P лежит на дуге ADB). Найдите площадь четырёхугольника $PDBQ$, если окружности касаются внутренним образом в точке B, а их радиусы равны 20 и 15 соответственно.

17 В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на три года в размере S млн рублей, где S — **целое** число. Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг увеличивается на 15 % по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
— в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2020	Июль 2021	Июль 2022	Июль 2023
Долг (в млн рублей)	S	$0{,}8S$	$0{,}5S$	0

Найдите наибольшее значение S, при котором каждая из выплат будет меньше 4 млн рублей.

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{x^4-4x^2+9a^2}=x^2+2x-3a$$

имеет ровно 3 решения.

19 На доске в одну строку слева направо написаны n натуральных чисел, причём каждое следующее из них является квадратом предыдущего.
а) Могли ли при $n=3$ на доске быть написаны ровно 11 цифр (например, если на доске написаны числа 5, 25 и 625, то написаны ровно 6 цифр)?
б) Могли ли при $n=3$ на доске быть написаны ровно 12 цифр?
в) Какое самое маленькое число может быть написано на доске при $n=4$, если на доске написано ровно 22 цифры?

math100.ru

Ответы на тренировочные варианты 1910309-1910312 (профильный уровень) от 29.01.2020

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1910309	590	7	17,5	0,2	7	4	15	7,92	6	117	19	- 10
1910310	360	- 15	27	0,28	5	36	10	7,5	2	234	11	- 35
1910311	21	2	40,5	0,441	15	108	35	25	56	6,25	15	8
1910312	24	1	22,5	0,336	- 5	240	38	5	12	8	16	53

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

13 а) Решите уравнение $\sin\frac{5x}{2}\sin\frac{3x}{2}+\cos\frac{5x}{2}\cos\frac{3x}{2}=2\cos^2 x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi;\frac{5\pi}{2}\right]$.

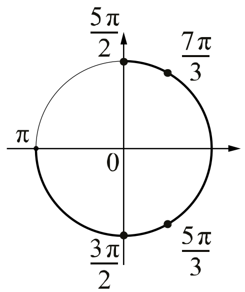
Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде

$$\cos\left(\frac{5x}{2}-\frac{3x}{2}\right)=2\cos^2 x;\ 2\cos^2 x-\cos x=0;\ 2\cos x\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)=0.$$

Значит, $\cos x=0$ или $\cos x=\frac{1}{2}$, следовательно, $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$ или $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $n,k\in\mathbb{Z}$.

б) Корни, принадлежащие отрезку $\left[\pi;\frac{5\pi}{2}\right]$, отберём с помощью единичной окружности.



Получаем $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{5\pi}{3}$; $\frac{7\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{2}$.

Ответ: а) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n,k\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{5\pi}{3}$; $\frac{7\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

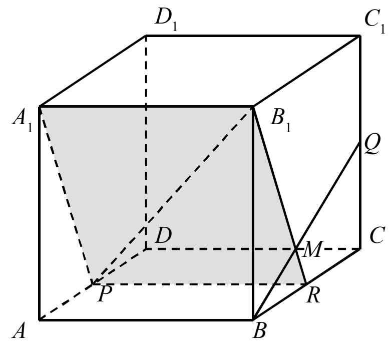
14 Точки P и Q — середины рёбер AD и CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ соответственно.

а) Докажите, что прямые B_1P и QB перпендикулярны.

б) Найдите площадь сечения куба плоскостью, проходящей через точку P и перпендикулярной прямой BQ, если ребро куба равно 10.

Решение.

а) Проведём отрезок B_1R, параллельный A_1P. Пусть M — точка пересечения отрезков B_1R и QB. Треугольник BMR прямоугольный с прямым углом при вершине M. Это следует из равенства треугольников RB_1B и QBC. Значит, прямые QB и B_1R перпендикулярны. Прямые QB и PR перпендикулярны, так как прямая PR перпендикулярна плоскости BCC_1. Поэтому прямая QB перпендикулярна плоскости A_1B_1P, и, следовательно, прямая QB перпендикулярна прямой B_1P.



б) Указанное сечение — прямоугольник A_1B_1RP. Его площадь равна $A_1B_1\cdot A_1P=50\sqrt{5}$.

Ответ: б) $50\sqrt{5}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство $\frac{(x-2)(x-4)(x-7)}{(x+2)(x+4)(x+7)}>1$.

Решение.

Запишем исходное неравенство в виде

$$\frac{x^3-13x^2+50x-56}{(x+2)(x+4)(x+7)}-1>0;\ \frac{x^3-13x^2+50x-56-(x^3+13x^2+50x+56)}{(x+2)(x+4)(x+7)}>0;$$

$$\frac{-26x^2-112}{(x+2)(x+4)(x+7)}>0;\ \frac{13x^2+56}{(x+2)(x+4)(x+7)}<0,$$ откуда $x<-7$, $-4<x<-2$.

Ответ: $(-\infty;-7)$; $(-4;-2)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

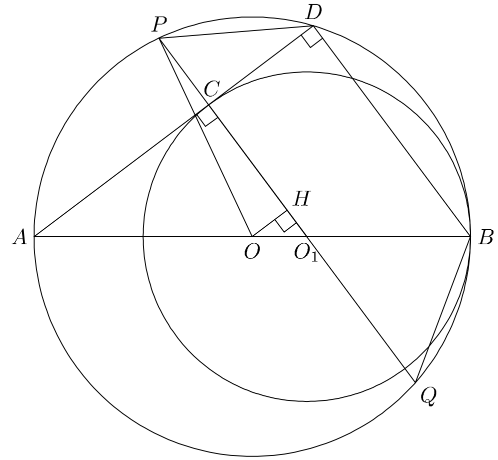
16 На диаметре AB окружности с центром O взята точка O_1. Построена вторая окружность с центром в точке O_1 радиусом O_1B. Луч с началом в точке A касается второй окружности в точке C и пересекает первую окружность в точке D.

а) Докажите, что прямые O_1C и BD параллельны.

б) Прямая O_1C пересекает окружность с диаметром AB в точках P и Q (точка P лежит на дуге ADB). Найдите площадь четырёхугольника $PDBQ$, если окружности касаются внутренним образом в точке B, а их радиусы равны 20 и 15 соответственно.

Решение.

а) Точка D лежит на окружности с диаметром AB, поэтому BD перпендикулярна AD. Прямая AD касается второй окружности в точке C, поэтому O_1C перпендикулярна AD. Прямые BD и O_1C перпендикулярны одной и той же прямой, следовательно, они параллельны.



б) Из того, что точка O_1 лежит на отрезке AB, а радиус второй окружности меньше радиуса первой, следует, что точка O_1 лежит на отрезке OB. В прямоугольном треугольнике ACO_1 известны катет $CO_1=15$ и гипотенуза $AO_1=AB-O_1B=40-15=25$. По теореме Пифагора находим, что $AC=20$. Треугольник ADB подобен треугольнику ACO_1 с коэффициентом $\frac{AB}{AO_1}=\frac{8}{5}$, поэтому $BD=\frac{8}{5}CO_1=\frac{8}{5}\cdot 15=24$.

Пусть H — проекция точки O на прямую PQ. Тогда H — середина хорды PQ, а так как треугольник OHO_1 подобен треугольнику ACO_1 с коэффициентом

$$\frac{OO_1}{AO_1}=\frac{AO_1-AO}{AO_1}=\frac{25-20}{25}=\frac{1}{5},$$

получаем, что $OH=\frac{1}{5}AC=4$.

Из прямоугольного треугольника OHP находим, что

$$HP=\sqrt{OP^2-OH^2}=\sqrt{400-16}=8\sqrt{6}.$$

Тогда $PQ=2HP=16\sqrt{6}$.

Четырёхугольник $PDBQ$ — равнобедренная трапеция с основаниями $PQ=16\sqrt{6}$, $BD=24$ и высотой CD. По теореме о пропорциональных отрезках $\frac{CD}{AC}=\frac{BO_1}{AO_1}=\frac{3}{5}$, откуда $CD=\frac{3}{5}AC=\frac{3}{5}\cdot 20=12$.

Следовательно,

$$S_{PDBQ}=\frac{BD+PQ}{2}\cdot CD=\frac{24+16\sqrt{6}}{2}\cdot 12=48\left(3+2\sqrt{6}\right).$$

Ответ: б) $48\left(3+2\sqrt{6}\right)$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на три года в размере S млн рублей, где S — **целое** число. Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг увеличивается на 15 % по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
— в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2020	Июль 2021	Июль 2022	Июль 2023
Долг (в млн рублей)	S	$0{,}8S$	$0{,}5S$	0

Найдите наибольшее значение S, при котором каждая из выплат будет меньше 4 млн рублей.

Решение.

В январе 2021 года долг будет составлять $1{,}15S$ млн рублей, а в июле 2021 года — $0{,}8S$ млн рублей. Значит, выплата в 2021 году составит $0{,}35S$ млн рублей.

В январе 2022 года долг будет составлять $1{,}15\cdot 0{,}8S=0{,}92S$ млн рублей, а в июле 2022 года — $0{,}5S$ млн рублей. Значит, выплата в 2022 году составит $0{,}42S$ млн рублей.

В январе 2023 года долг перед банком составит $1{,}15\cdot 0{,}5S=0{,}575S$, а в июле — 0 рублей. Значит, выплата в 2023 году составит $0{,}575S$ млн рублей.

Решим систему:

$$\begin{cases}0{,}35S<4,\\0{,}42S<4,\\0{,}575S<4\end{cases}\qquad\begin{cases}S<11{,}42...,\\S<9{,}52...,\\S<6{,}95...\end{cases}$$

Наибольшее целое решение этой системы — $S=6$ млн рублей.

Ответ: 6.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Верно построена математическая модель, и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{x^4-4x^2+9a^2}=x^2+2x-3a$$

имеет ровно 3 решения.

Решение.

Перейдём к системе:

$$\begin{cases}x^4-4x^2+9a^2=x^4+4x^2+9a^2+4x^3-6ax^2-12ax,\\x^2+2x-3a\ge 0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}3ax(x+2)=2x^2(x+2),\\x^2+2x-3a\ge 0.\end{cases}$$

Уравнение имеет корни $x=0$ и $x=-2$ при любых значениях a и ещё один корень $x=\frac{3}{2}a$, который не должен совпадать с двумя другими. Значит, $a\ne -\frac{4}{3}$ и $a\ne 0$. При этом должно выполняться неравенство $x^2+2x-3a\ge 0$.

Получаем

$$\begin{cases} (-2)^2 - 4 - 3a \geq 0, \\ 0^2 + 0 - 3a \geq 0, \\ \frac{9}{4}a^2 + 3a - 3a \geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \leq 0, \\ a^2 \geq 0, \end{cases}$$

откуда $a \leq 0$.

Ответ: $a < -\frac{4}{3}$, $-\frac{4}{3} < a < 0$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все значения a, но ответ содержит лишнее значение	3
С помощью верного рассуждения получены все решения уравнения	2
Задача верно сведена к исследованию возможного значения корней уравнения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 На доске в одну строку слева направо написаны n натуральных чисел, причём каждое следующее из них является квадратом предыдущего.

а) Могли ли при $n = 3$ на доске быть написаны ровно 11 цифр (например, если на доске написаны числа 5, 25 и 625, то написаны ровно 6 цифр)?

б) Могли ли при $n = 3$ на доске быть написаны ровно 12 цифр?

в) Какое самое маленькое число может быть написано на доске при $n = 4$, если на доске написано ровно 22 цифры?

Решение.

а) Да. Например, если написаны числа 20, 400 и 160 000.

б) Предположим, что это возможно. Если второе из написанных чисел меньше 1000, то первое из этих чисел меньше 32, а третье меньше 1 000 000. Значит, в этом случае на доске написаны не больше $2+3+6=11$ цифр.

Если второе из написанных чисел не меньше 1000, то первое из этих чисел не меньше 32, а третье не меньше 1 000 000. Следовательно, в этом случае на доске написаны не меньше $2+4+7=13$ цифр.

Во всех случаях пришли к противоречию. Значит, на доске не могли быть написаны ровно 12 цифр при $n = 3$.

в) Самое маленькое написанное на доске число — первое. Если оно не больше 17, то второе число не больше 289, третье число не больше

$289^2 < 300^2 = 9 \cdot 10^4$, а четвёртое число меньше $90000^2 = 81 \cdot 10^8$. Значит, в этом случае на доске написаны не больше $2+3+5+10=20$ цифр.

Если первое число равно 18, то второе число равно $18^2 = 324$, третье число больше $320^2 = 102400 > 10^5$ и меньше $400^2 = 160000 < 2 \cdot 10^5$, четвёртое число больше 10^{10} и меньше $4 \cdot 10^{10}$. Следовательно, в этом случае на доске написаны ровно $2+3+6+11=22$ цифры.

Значит, самое маленькое число, которое может быть написано на доске при $n = 4$, если на доске написано ровно 22 цифры, — это 18.

Ответ: а) Да; б) нет; в) 18.

Содержание критерия	Баллы
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *б*, либо получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *в*	3
Получен верный обоснованный ответ в пункте *б*, пункты *а* и *в* не решены, либо получен верный обоснованный ответ в пункте *в*, пункты *а* и *б* не решены	2
Приведён пример в пункте *а*, пункты *б* и *в* не решены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4