Критерии проверки и оценка решений заданий 18 (20 в 2015 г., С5 ранее) вариантов КИМ ЕГЭ–2017

Как это обычно бывает, задачи с параметром допускают весьма разнообразные способы решения. Наиболее распространенными из них являются:

– чисто алгебраический способ решения;

– способ решения, основанный на построении и исследовании геометрической модели данной задачи;

– функциональный способ, в котором могут быть и алгебраические, и геометрические моменты, но базовым является исследование некоторой функции.

Зачастую (но далеко не всегда) графический метод более ясно ведёт к цели. Кроме того, в конкретном тексте решения вполне могут встречаться элементы каждого из трех перечисленных способов.

Ниже приведены задачи двух типов из материалов досрочного и основного ЕГЭ–2015, их решения, ответы и соответствующие критерии проверки. Далее в Части 1 приведены 6 примеров решений этих задач на ЕГЭ вместе с комментариями по оценке и самими оценками. Подчеркнём, что каждая задача оценивалась по критериям соответствующего года проведения ЕГЭ.

Задачи типа 1 и 2 имеют много схожего в своей структуре и условиях:

(1) это системы относительно двух переменных;

(2) это системы с параметром;

(3) первое уравнение системы довольно громоздкое, но не содержит параметр;

(4) уравнение, содержащее параметр, напротив, весьма простое; это уравнение пучка параллельных прямых, или прямых, проходящих через фиксированную точку;

(4) всё начинается с преобразований первого уравнения и его решения;

(5) далее, как правило, удобнее использовать геометрическую интерпретацию;

(6) верное выполнение (4) и (5) гарантирует получение 1 балла;

(7) 3 балла выставляется за практически верное решение; допускаются только 1–2 неточности во включении концевых точек соответствующих промежутков;

(8) оценка в 2 балла – самая редкая.

В то же время, имеются и различия. В основном они связаны с видом первого уравнения. В заданиях первого типа эти уравнения сводятся к произведению двух линейных множителей или же линейного множителя и (простейшего) квадратичного множителя. Такое разложение можно провести или группировкой членов, или решая уравнение, как квадратное относительно одной из переменных.

В заданиях второго типа присутствует модуль. При его раскрытии с помощью выделения полных квадратов всё сводится к дугам двух окружностей. Дальнейший существенный шаг состоит в нахождении угловых коэффициентов касательных в точках пересечения этих окружностей. Без знания того, что для наклонных прямых $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1 k_2 = -1$ (или какого-то аналога нахождения уравнения перпендикуляра к заданной прямой в заданной точке) этот шаг становится почти непреодолимым. Судя по имеющимся сканам работ, верное нахождение угловых коэффициентов касательных в большинстве случаев гарантировало получение 3 баллов за решение.

Задача 1

Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} yx^2+y^2=2y+63-7x^2, \\ x\ge -3 \\ x+y=a \end{cases}$

имеет ровно два различных решения.

Решение.

Решим первое уравнение:

$$yx^2+y^2=2y+63-7x^2, \qquad yx^2+7x^2+y^2-2y-63=0, \qquad x^2(y+7)+(y+7)(y-9)$$

$$(y+7)(y+x^2-9)=0, \quad y_1=-7, \quad y_2=9-x^2.$$

Рассмотрим случай (1): $y=-7$. При любом a получаем одно решение $x=a+7$, для которого неравенство $x\ge -3$ верно только при $a\ge -10$.

Рассмотрим случай (2): $y=9-x^2, \quad 9-x^2=a-x, \quad x^2-x+(a-9)=0$. Так как $D=1-4(a-9)=37-4a$, то при $a>9{,}25$ корней нет, при $a=9{,}25$ получаем один корень $x=0{,}5$, при $a<9{,}25$ получаем два различных корня. У параболы $y=x^2-x+(a-9)$ - ветви вверх, абсцисса вершины равна $0{,}5>0$ и $y(-3)=3+a$. Значит, оба корня не меньше -3 при $3+a\ge 0$, т.е. при $-3\le a<9{,}25$, а при $a<-3$ один корень меньше -3, а другой – больше -3.

Соберем сведения о числе решений в случаях (1) и (2) в таблице

a	$a<-10$	$-10\le a<-3$	$-3\le a<9{,}25$	$a=9{,}25$	$a>9{,}25$
Число решений (1)	0	1	1	1	1
Число решений (2)	1	1	2	1	0

Остается учесть те значения a, при которых решение из случая (1) совпадает с одним из решений случая (2). Тогда $y=-7=9-x^2, \ x=\pm 4$, и из $x+y=a$, $x\ge -3$ получаем, что $x=4, \ a=-3$.

Ответ: $-10\le a\le -3, \quad a=9{,}25$.

Содержание критерия, задача №20, ЕГЭ-2015	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получен ответ, отличающийся от верного на одно или оба из значений $a=-10, \quad a=-3$.	3
Обоснованно получено, что условие задачи выполняется хотя бы в одном из случаев $-10<a<-3$ или $a=9{,}25$.	2
Задача верно сведена к исследованию расположения парабол и прямых (аналитически или графически) ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Задача 2.

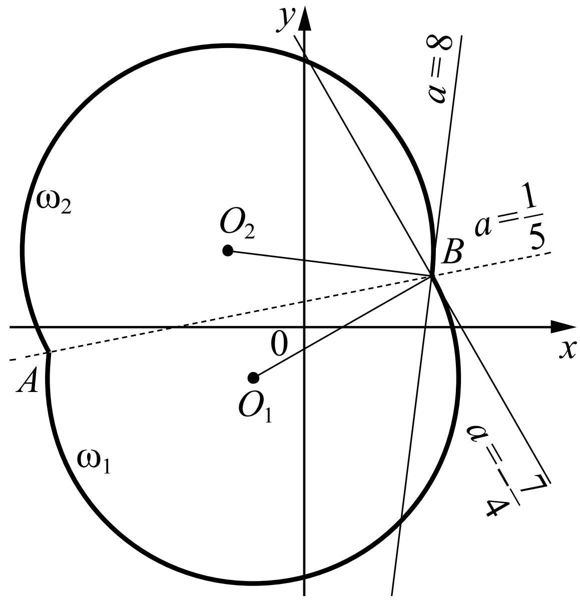
Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2+5x+y^2-y-\left|x-5y+5\right|=52, \\ y-2=a\left(x-5\right) \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

Решение.

Изобразим на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют первому уравнению системы.



Рассмотрим два случая:

1) Если $x-5y+5\geq 0$, то получаем уравнение

$$x^2+5x+y^2-y-x+5y-5=52;$$

$$x^2+4x+y^2+4y-57=0;$$

$$\left(x+2\right)^2+\left(y+2\right)^2=65.$$

Полученное уравнение задаёт окружность с центром в точке $O_1\left(-2;-2\right)$ и радиусом $\sqrt{65}$.

2) Если $x-5y+5\leq 0$, то получаем уравнение

$$x^2+5x+y^2-y+x-5y+5=52;$$

$$x^2+6x+y^2-6y-47=0;\ \left(x+3\right)^2+\left(y-3\right)^2=65.$$

Полученное уравнение задаёт окружность с центром в точке $O_2\left(-3;3\right)$ и радиусом $\sqrt{65}$.

Полученные окружности пересекаются в двух точках $A\left(-10;-1\right)$ и $B\left(5;2\right)$, лежащих на прямой $x-5y+5=0$, поэтому в первом случае получаем дугу ω_1 с концами в точках A и B, во втором — дугу ω_2 с концами в тех же точках (см. рис.).

Рассмотрим второе уравнение системы. Оно задаёт прямую m, которая проходит через точку B и угловой коэффициент которой равен a.

При $a=\dfrac{1}{5}$ прямая m проходит через точки A и B, то есть исходная система имеет два решения.

При $a=-\dfrac{7}{4}$ прямая m перпендикулярна прямой O_1B, угловой коэффициент которой равен $\dfrac{4}{7}$, значит, прямая m касается дуги ω_1 в точке B и пересекает дугу ω_2 в двух точках (одна из которых — точка B), то есть исходная система имеет два решения.

При $a=8$ прямая m перпендикулярна прямой O_2B, угловой коэффициент которой равен $-\frac{1}{8}$, значит, прямая m касается дуги ω_2 в точке B и пересекает дугу ω_1 в двух точках (одна из которых — точка B), то есть исходная система имеет два решения.

При $a<-\frac{7}{4}$ или $a>8$ прямая m пересекает каждую из дуг ω_1 и ω_2 в точке B и ещё в одной точке, отличной от точки A, то есть исходная система имеет три решения.

При $-\frac{7}{4}<a<\frac{1}{5}$ прямая m пересекает дугу ω_2 в двух точках (одна из которых — точка B) и не пересекает дугу ω_1 в точках, отличных от точки B, то есть исходная система имеет два решения.

При $\frac{1}{5}<a<8$ прямая m пересекает дугу ω_1 в двух точках (одна из которых — точка B) и не пересекает дугу ω_2 в точках, отличных от точки B, то есть исходная система имеет два решения.

Значит, исходная система имеет ровно два решения при $-\frac{7}{4}\le a\le 8$.

Ответ: $-\frac{7}{4}\le a\le 8$.

Содержание критерия, задача №2	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений *a*, отличающееся от искомого только исключением точек $a=-\frac{7}{4}$ и/или $a=8$	3
При всех значениях *a* верно найдено количество решений системы в одном из двух случаев, возникающих при раскрытии модуля	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения дуг окружностей и прямых (аналитически или графически) ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Примеры оценивания решений заданий 18

Пример 1. Система, см. текст, имеет ровно два решения. **Ответ:** $-8 \le a \le \frac{7}{4}$.

№ 20

$$\begin{cases} x^2+5x+y^2+y-|x+5y+5|=52 & (1) \\ y+2=a(x-5) & (2) \end{cases}$$

(1) $$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+5y+5 \geq 0 \\ x^2+5x+y^2+y-x-5y-5=52 \end{cases} \\ \begin{cases} y < \frac{-x-5}{5} \\ x^2+5x+y^2+y+x+5y+5=52 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y \geq \frac{-x-5}{5} \\ x^2+4x+y^2-4y=57 \end{cases} \\ \begin{cases} y < \frac{-x-5}{5} \\ x^2+6x+y^2+6y=47 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y \geq \frac{-x-5}{5} \\ (x+2)^2+(y-2)^2=65 \end{cases} \quad (1.1) \\ \begin{cases} y < \frac{-x-5}{5} \\ (x+3)^2+(y+3)^2=65 \end{cases} \quad (1.2) \end{array}\right.$$

$(x+2)^2+(y-2)^2=65$ – ур-е окр-ти с центром в т. $Q(-2;2)$ и $R_1=\sqrt{65}$

$(x+3)^2+(y+3)^2=65$ – ур-е окр-ти с центром в т $P(-3;-3)$ и $R_2=R_1=\sqrt{65}$

1.1) $\begin{cases} y \geq \frac{-x-5}{5} \\ (x+2)^2+(y+2)^2=65 \end{cases}$

т. перес с прямой $y=\frac{-x-5}{5}$

$(x+2)^2+\left(\frac{-x-5}{5}-2\right)^2=65$

$(x+2)^2+\left(\frac{-(x+5)-10}{5}\right)^2=65$

$(x+2)^2+\frac{(x+5+10)^2}{25}=65$

$(x+2)^2+\frac{(x+15)^2}{25}=65$

$x^2+4x+4+\frac{x^2+30x+225}{25}=65$

$25x^2+100x+100+x^2+30x+225-65\cdot 25=0$

$26x^2+130x-1300=0$

$2x^2+10x-100=0$

$x^2+5x-50=0$

$D=25+200=225$

$x_1=\frac{-5+15}{2}=5$, $\quad y_1=\frac{-5-5}{5}=-2$

$x_2=\frac{-5-15}{2}=-10$ $\quad y_2=\frac{10-5}{5}=1$

1 2.) $\begin{cases} y < \frac{-x-5}{5} \\ (x+3)^2+(y+3)^2=65 \end{cases}$

т перес с пр $y=\frac{-x-5}{5}$

$(x+3)^2 + \frac{(x+5-15)^2}{25} = 65$

$25x^2+6\cdot 25x+9\cdot 25+(x-10)^2-65\cdot 25=0$

$26x^2+150x+225-20x+100-1625=0$

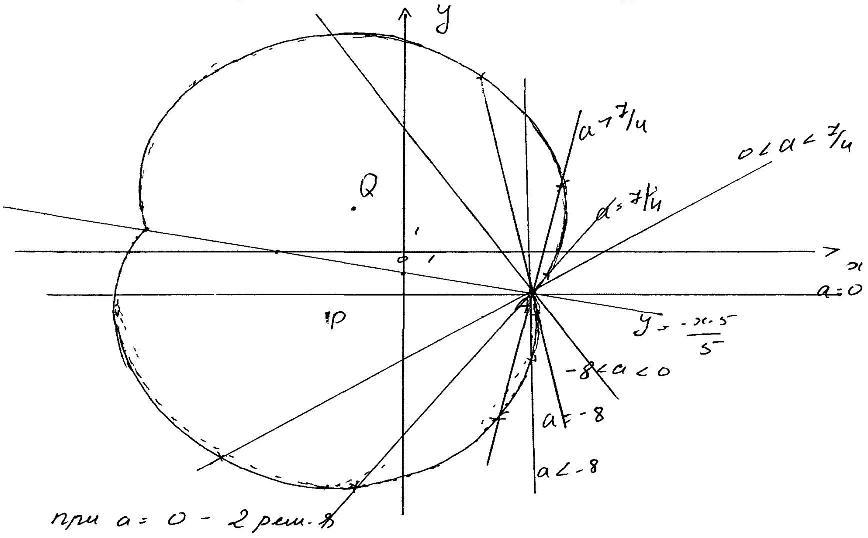
$26x^2+130x-1300=0$

$x^2+5x-50=0$

$x_3=x_1=5, \quad y_3=y_1=-2$

$x_4=x_2=-10 \quad y_4=y_2=1$

(2) $y=a(x-5)-2$ - ур-е пучка прямых, проход. через т $A(5;-2)$ см продолжение на доп бланке



при $a=0$ - 2 реш-я

найдём a, при к-м $y=a(x-5)-2$ касается окр-ти с ц. в т Q

$(x+2)^2+(a(x-5)-2-2)^2=65$

$x^2+4x+4+(a(x-5)-4)^2=65$

$x^2+4x+4+a^2(x-5)^2-8a(x-5)+16-65=0$

$x^2+4x+a^2(x^2-10x+25)-8ax+40a-45=0$

$\cancel{x^2+4}\ x^2(1+a^2)+x(4-10a^2-8a)+25a^2+40a-45=0$

$\frac{D}{4}=(2-5a^2-4a)^2-(a^2+1)(25a^2+40a-45)=$

$(5a^2+4a-2)^2-(a^2+1)(25a^2+40a-45)=$ см продолж на обороте

$25a^4+40a^3+16a^2-\cancel{20}a^2-16a+4-25a^4-40a^3+45a^2-$

$-25a^2-40a+45=\quad16a^2-40a+45-16a+4=$

$=16a^2-56a+49=0$ (т.к ур-е должно иметь ед-е реш-е)

$16a^2-56a+49=0$

$\frac{D}{4}=28^2-16\cdot49=0$

$(4a-7)^2=0$

при $a=\frac{7}{4}$ – 3 реш-я

при $a>\frac{7}{4}$ – 3 реш-я, при $a\in(0;\frac{7}{4})$ – 2 р-я

найдём a, при к-х $y=a(x-5)-2$ кас. окр-ти в т P

$x^2+6x+(a(x-5)-2)^2+6(a(x-5)-2)-47=0$

$x^2+6x+a^2(x-5)^2-4a(x-5)+4+6a(x-5)-12-47=0$

$x^2+6x+a^2(x^2-10x+25)-4ax+20a+6ax-30a-55=0$

$x^2(1+a^2)+6x-10a^2x+25a^2+2ax-10a-55=0$

$x^2(a^2+1)+x(6-10a^2+2a)+25a^2-10a-55=0$

$\frac{D}{4}=(3+a-5a^2)^2-(a^2+1)(25a^2-10a-55)=$

$=9+6(a-5a^2)+(a-5a^2)^2-25a^4+10a^3+55a^2-$

$-25a^2+10a+55=25a^4-10a^3+a^2+6a-30a^2+$

$+9-25a^4+10a^3+55a^2-25a^2+10a+55=a^2+16a+64$

$a^2+16a+64=0$ (т.к ур-е должно иметь ед-е реш-е)

$(a+8)^2=0$

при $a=-8$ – 3 р-я

при $a<-8$ – 3 р-я, при $a\in(-8;0)$ – 2 р-я

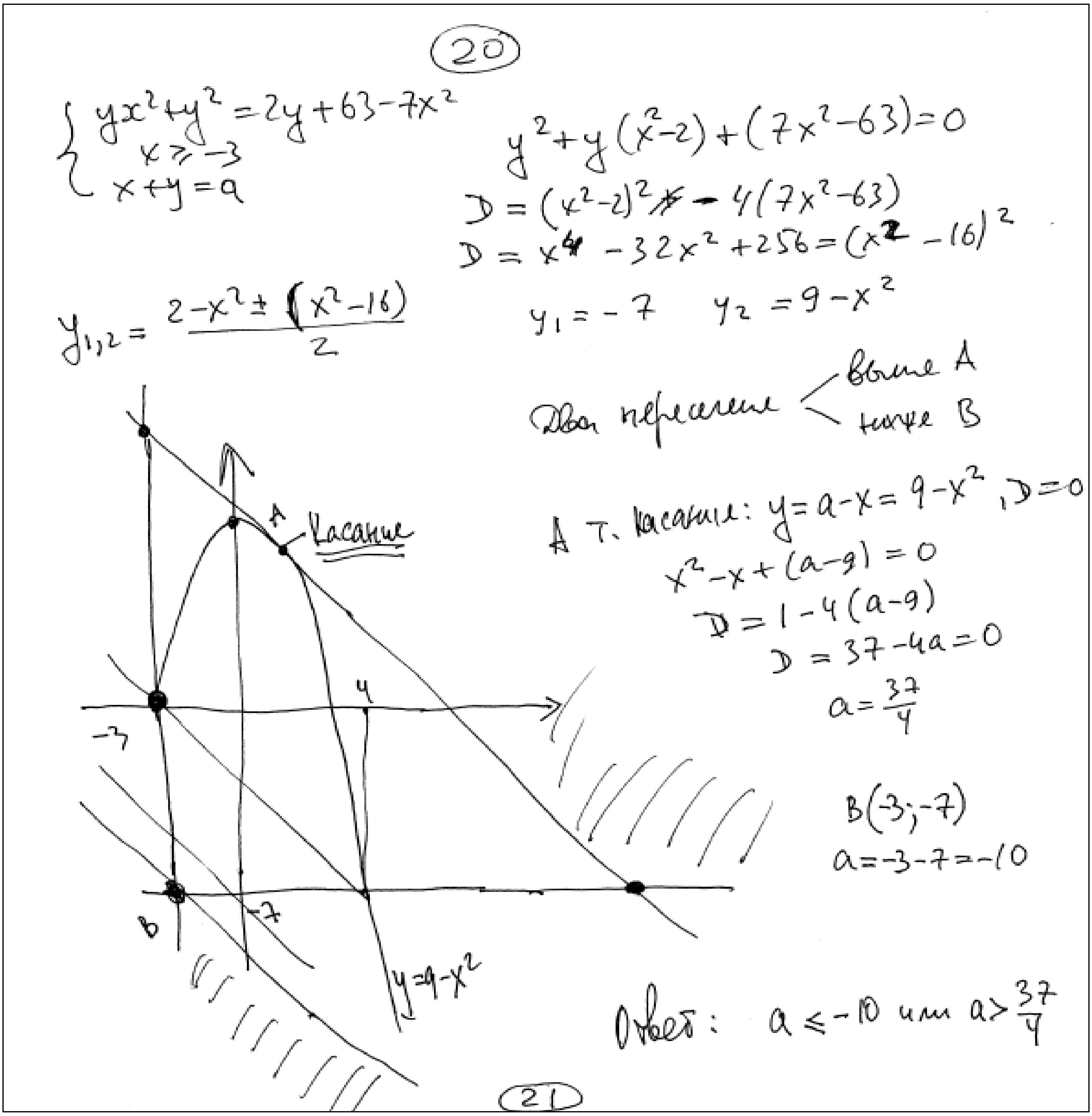
Ответ: 2 р-я при $a\in(-8;0)\cup(0;\frac{7}{4})\cup\{0\}$, т.е при $a\in(-8;\frac{7}{4})$

Комментарий. Ход решения ясен, изложен более чем подробно. Ошибок нет, кроме прокола с невключением в ответ концов промежутка.

Довольно показательный пример, когда переход от геометрического способа к алгебраическому способу решения запутывает ситуацию.

Оценка эксперта: 3 балла.

Пример 2. Условие см. текст выше, Задача 1. **Ответ:** $-10 \le a \le -3, \quad a = 9{,}25$.



20

$$\begin{cases} yx^2+y^2=2y+63-7x^2 \\ x \geqslant -3 \\ x+y=a \end{cases}$$

$y^2+y(x^2-2)+(7x^2-63)=0$

$D=(x^2-2)^2 \cancel{x} - 4(7x^2-63)$

$D=x^4-32x^2+256=(x^2-16)^2$

$y_{1,2}=\dfrac{2-x^2 \pm (x^2-16)}{2}$

$y_1=-7 \quad y_2=9-x^2$

Двои пересечение < выше A / ниже B

A т. касание: $y=a-x=9-x^2$, $D=0$

$x^2-x+(a-9)=0$

$D=1-4(a-9)$

$D=37-4a=0$

$a=\dfrac{37}{4}$

$B(-3;-7)$

$a=-3-7=-10$

Ответ: $a \leqslant -10$ или $a > \dfrac{37}{4}$

21

Комментарий. Деликатный случай. С одной стороны, есть явное и полное понимание ситуации. С другой стороны, в самом начале допущена ошибка с включением прямой $x = -3$ во множество решений. И только из-за этого в дальнейшем был произведен отбор, давший неверный ответ. Более 1 балла поставить нельзя. На 1 балл условие критерия «Задача верно сведена…» не выполнено, и условие «получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения» не выполнено. Всё-таки, ставить 0 баллов.

Оценка эксперта: 0 баллов.

Пример 3. Система, см. текст, имеет ровно два решения. **Ответ:** $-8 \le a \le \frac{7}{4}$.

Решение:

$$\begin{cases} x^2+5x+y^2+y-|x+5y+5|=52 \\ y+2=a(x-5) \end{cases}$$

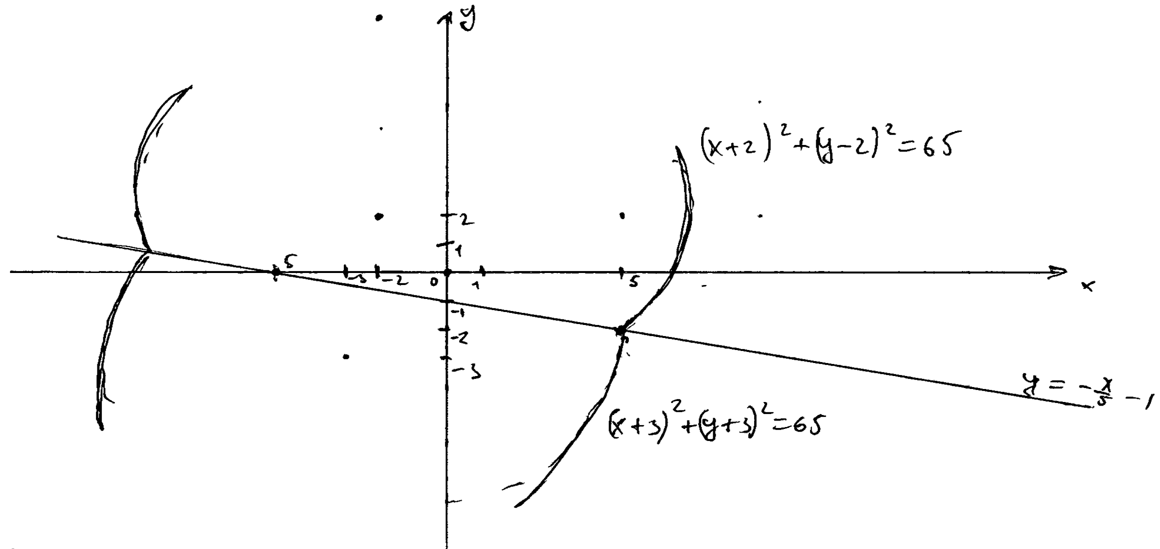
Рассмотрим 2 случая при $x+5y+5 \geq 0$ и при $x+5y+5<0$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+5x+y^2+y-x-5y-5=52 \\ x+5y+5 \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+5x+y^2+y+x+5y+5=52 \\ x+5y+5<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} (x+2)^2+(y-2)^2=\cancel{49}\ 65 \\ y \geq -\frac{x}{5}-1 \end{cases} \\ \begin{cases} (x+3)^2+(y+3)^2=65 \\ y \leq -\frac{x}{5}-1 \end{cases} \end{array}\right.$$

– графиком ф-ии является окр. с центром $(-2;2)$ и $r=\sqrt{65}$

– графиком ф-ии является окр. с центром $(-3;-3)$ и $r=\sqrt{65}$.

Построим эскизы графиков.



Рассмотрим $y+2=a(x-5)$.

$y=a(x-5)-2$. – графиком ф-ии является множество прямых, проходящих через точку $(5;-2)$. Тогда, для касания окр. $(\{-3;-3\}; \sqrt{65})$ „a" должно быть равно -8, а для касания окр $(\{-2;2\}; \sqrt{65})$ „a" должно быть равно $\frac{7}{4}$.

при $a \in [-8; \frac{7}{4}]$ сис-ма имеет 2 корня.

при $a \in (-\infty; -8) \cup (\frac{7}{4}; +\infty)$ сис-ма имеет 3 корня.

Ответ: $a \in [-8; \frac{7}{4}]$.

Комментарий. Ответ верен, но только нет даже намека на обоснование того, почему для касания a «должно быть равно -8» или «…7/4».

Оценка эксперта: 4 балла.

Пример 4. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} yx^2 + y^2 = 2y + 63 - 7x^2, \\ x \geq -3 \\ x + y = a \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Ответ: $-10 \leq a \leq -3$, $a = 9{,}25$.

№20 В первом уравнении возьмем члены без x: $y^2-2y-63$.

По т. Виета $y^2-2y-63=(y+7)(y-9)$. А у членов с x тоже выражение $y+7$

$y^2-2y-63=-yx^2-7x^2$; $(y+7)(y-9)=-x^2(y+7)$

$y=a-x=-7$	$y=a-x=9-x^2$
	$x^2-x+(a-9)=0$, $D=1-4(a-9)=0$
$x=a+7$	$a=37/4$, $a=9{,}25$
$\boxed{x=16{,}25}$	$\boxed{x_{1,2}=0{,}5}$ два решения ≥ -3

При других a решений будет или $1+2=3$, или $1+0=1$ штук ($D>0$, $D<0$)

Ответ: $a=9{,}25$

Комментарий.

Довольно редкий случай, когда в точности по критериям можно поставить 2 балла. О трёх баллах речь в принципе не идет, так как автор практически полностью забыл учесть условие $x \geq -3$ и поэтому отбросил случай $D > 0$.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 5. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2+2x+y^2-4\left|x+3y+1\right|=9, \\ y+1=a(x-2) \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

Ответ: $-1 \le a \le \dfrac{1}{7}$.

№ 20

$$\begin{cases} x^2+2x+y^2-4\left|x+3y+1\right|=9 \\ y+1=a(x-2) \end{cases}$$

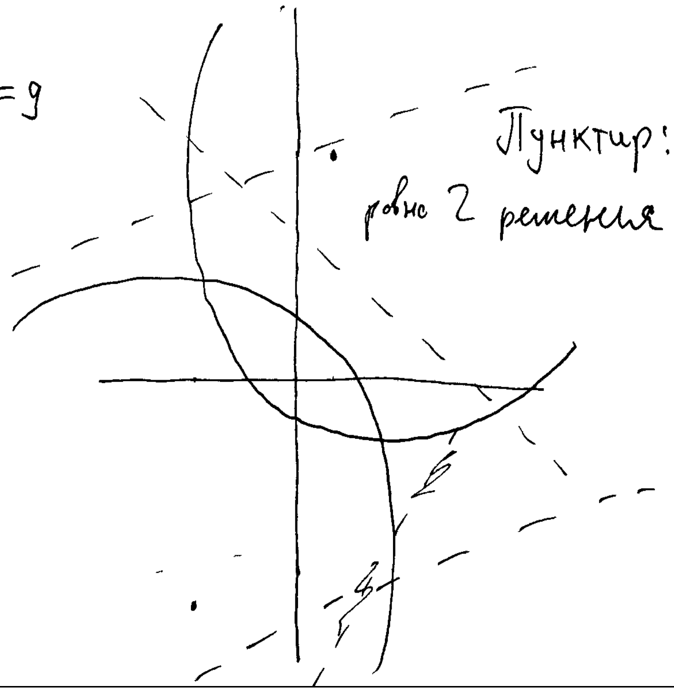
$x+3y+1 \geqslant 0$

$(x-1)^2+(y-6)^2=50$

$x+3y+1<0$

$(x+3)^2+(y+6)^2=50$

$y=a(x-2)-1$



Комментарий.

Никакого ответа нет, но работа «не пустая»: верно приведены уравнения окружностей в каждом случае раскрытия модуля (правда, без особых обоснований).

Тем не менее, невозможно считать, что, см. критерии, «Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения дуг окружностей и прямых (аналитически или графически)». Для этого, как минимум, не хватает пучка прямых, проходящих через точку (2;-1).

Оценка эксперта: 0 баллов.

Пример 6.

Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2+2x+y^2-4|x+3y+1|=9, \\ y+1=a(x-2) \end{cases}$$ имеет ровно два решения.

Ответ: $-1 \le a \le \dfrac{1}{7}$.

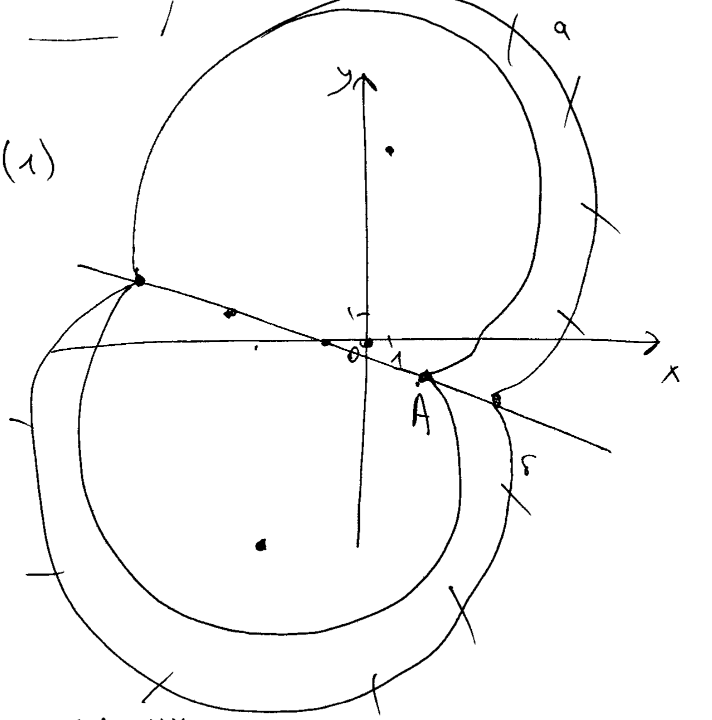
ч.т.д. (продолжение на бланке №5)

№20

$\begin{cases} x^2+2x+y^2-4|x+3y+1|=9 & (1) \\ y+1=a(x-2) & (2) \end{cases}$

(1) а) $\begin{cases} x+3y+1 \geq 0 \\ (x-1)^2+(y-6)^2=50 \end{cases}$

б) $\begin{cases} x+3y+1<0 \\ (x+3)^2+(y+6)^2=50 \end{cases}$



(2) $y=a(x-2)-1$

семейство прямых, проходящих через $A(2;-1)$

$A \in (1)$

$\Rightarrow$ ровно 2 корня, если $y=a(x-2)-1$ совпадает с $x+3y+1=0$

$\Rightarrow a=-\frac{1}{3}$ Ответ: $-\frac{1}{3}$

Комментарий. По сравнению с предыдущим примером – чистый 1 балл. Оба уравнения системы верно проинтерпретированы геометрически. Правда, вновь очень лаконично. Более ничего практически нет.

Оценка эксперта: 1 балл.