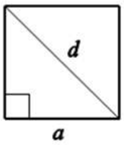
Планиметрия
(расширенная)

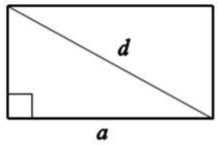
1. Площади плоских фигур



$S = a^2$

d – диагональ

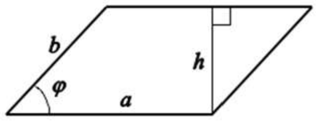
$d = a\sqrt{2}$



$S = a \cdot b$

d – диагональ

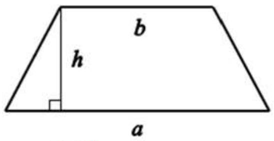
$d = \sqrt{a^2 + b^2}$



$S = a \cdot h$

h – высота

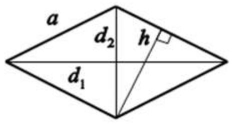
$S = a \cdot b \cdot \sin\varphi$



$S = \frac{a+b}{2} \cdot h$

a, b – основания

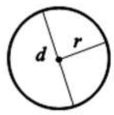
h – высота



$S = a \cdot h = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$

d_1, d_2 – диагонали

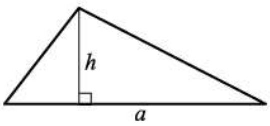
h – высота



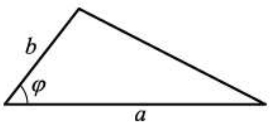
$S = \pi r^2$

$S = \frac{\pi d^2}{4}$

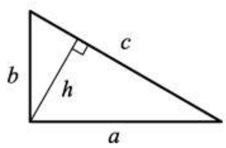
Площадь треугольника:



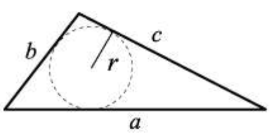
$$S = \frac{a \cdot h}{2}.$$



$$S = \frac{1}{2} ab \sin\varphi.$$



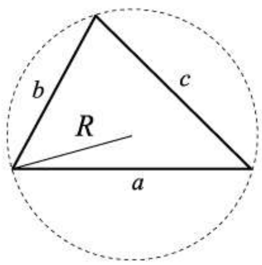
$$S = \frac{1}{2} ab = \frac{1}{2} ch.$$



$$S = pr,$$

где r — радиус вписанной окружности, а p – полупериметр:

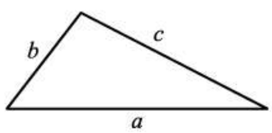
$$p = \frac{a+b+c}{2}.$$



$$S = \frac{abc}{4R},$$

где R — радиус описанной окружности.

Формула Герона:

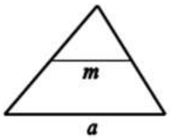


$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

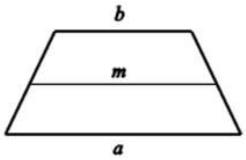
где p – полупериметр:

$$p = \frac{a+b+c}{2}.$$

2. Средняя линия

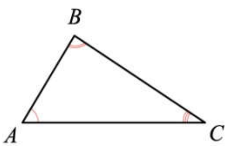


$$m = \frac{a}{2}$$



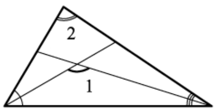
$$m = \frac{a+b}{2}$$

3. Треугольники



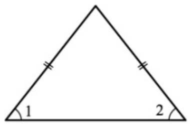
$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

Сумма углов треугольника равна **180°**.

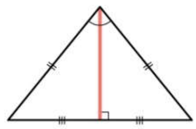


$$\angle 1 = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle 2$$

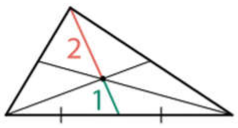
Тупой угол между биссектрисами двух углов треугольника равен **90° + половина третьего угла**.



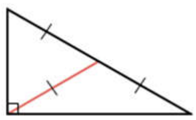
Углы при основании равнобедренного треугольника **равны**.



Биссектриса, медиана и высота, проведённые к основанию равнобедренного треугольника, **совпадают между собой**.

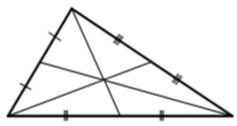


Медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении 2:1, считая от вершины.

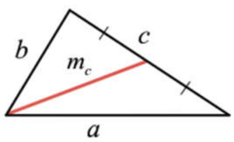


Если в треугольнике медиана равна половине стороны, к которой проведена, то этот треугольник — прямоугольный.

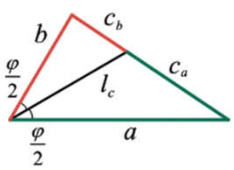
Каждая медиана делит треугольник на два равновеликих.



Три медианы треугольника делят его на 6 равновеликих треугольников.



$$m_c^{\,2} = \frac{1}{4}\left(2a^2 + 2b^2 - c^2\right)$$



$$l_c = \frac{2ab\cdot\cos\frac{\varphi}{2}}{a+b}, \quad l_c^{\,2} = ab - c_a c_b.$$

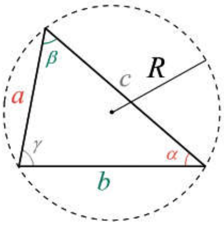
<u>Теорема о биссектрисе:</u>

Биссектриса треугольника делит противоположную сторону в отношении длин прилежащих сторон:

$$\frac{c_a}{c_b} = \frac{a}{b}.$$

Планиметрия (расширенная)

Теорема синусов:

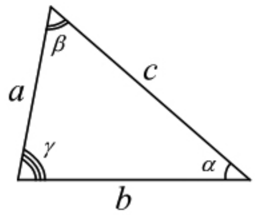


$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R$$

Следствие:
Отношение двух сторон треугольника равно отношению синусов противолежащих им углов:

$$\frac{a}{b}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

Теорема косинусов:

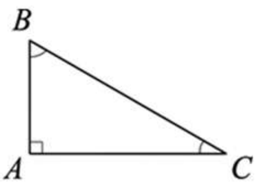


$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha.$$

Следствие:
Формулы для вычисления косинусов углов треугольника с известными сторонами:

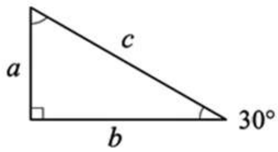
$$\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.$$

4. Прямоугольные треугольники



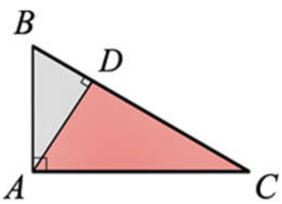
$\angle B+\angle C=90°$

Сумма острых углов прямоугольного треугольника равна **90°**.

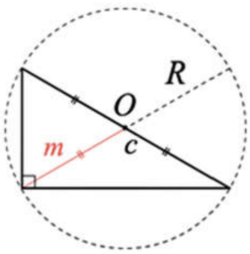


$a=\frac{1}{2}c$

Если в прямоугольном треугольнике острый угол равен 30°, то катет, лежащий против этого угла, равен **половине гипотенузы.**

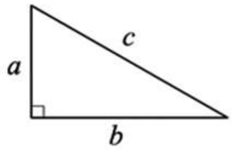


В любом прямоугольном треугольнике высота, опущенная из прямого угла (на гипотенузу), делит прямоугольный треугольник на **три подобных треугольника**.



$m=\frac{1}{2}c=R$

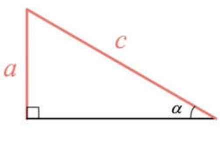
В прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, равна ее **половине** и равна радиусу описанной окружности.



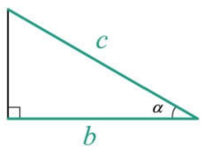
$c^2=a^2+b^2$

Теорема Пифагора:
Квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

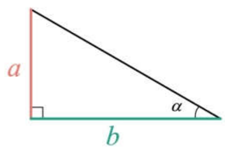
Синус, косинус и тангенс острого угла прямоугольного треугольника:



$$\sin\alpha=\frac{a}{c}$$



$$\cos\alpha=\frac{b}{c}$$



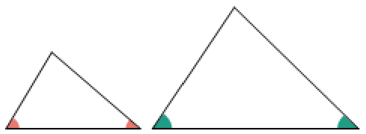
$$tg\alpha=\frac{a}{b}$$

$$tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

Основное тригонометрическое тождество:

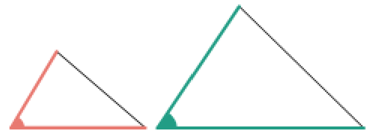
$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

5. Подобные треугольники



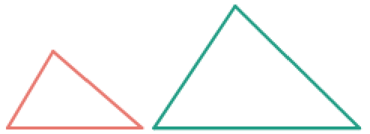
Первый признак подобия треугольников

Если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.



Второй признак подобия треугольников

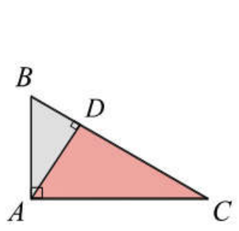
Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника, и углы, образованные этими сторонами, равны, то треугольники подобны.



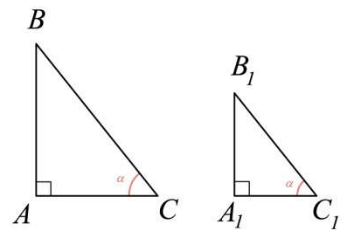
Третий признак подобия треугольников

Если стороны одного треугольника пропорциональны сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

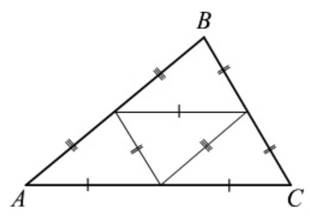
Отношение площадей двух подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.



В любом прямоугольном треугольнике высота, опущенная из прямого угла на гипотенузу, делит прямоугольный треугольник на три подобных треугольника.

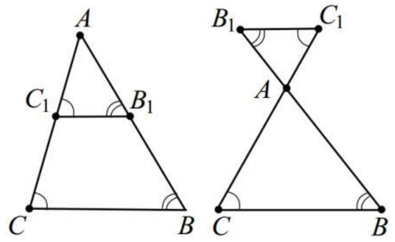


Для подобия двух прямоугольных треугольников достаточно, чтобы у них было по равному острому углу.

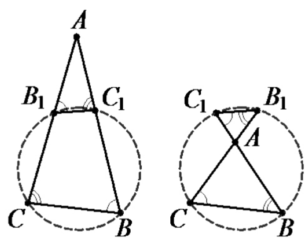


Три средних линии делят треугольник ABC на 4 равных треугольника, каждый из которых подобен треугольнику ABC с коэффициентом подобия 0,5.

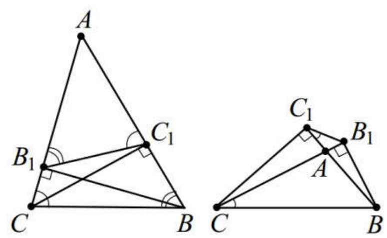
Подобные треугольники – стандартные конфигурации:



Фалесово подобие: $BC \parallel B_1C_1$.

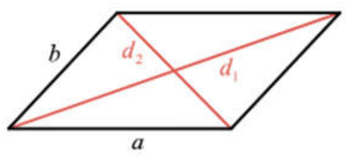


Подобие в конфигурации «угол со сторонами, пересекающими окружность».



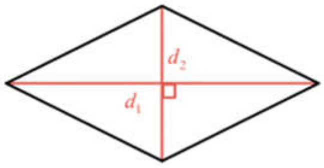
Треугольник AB_1C_1, образованный основаниями двух высот и вершиной, подобен треугольнику ABC.

6. Многоугольники

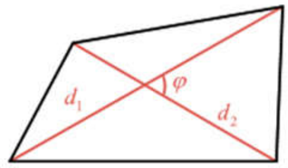


Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон:

$$d_1^{\,2}+d_2^{\,2}=2\left(a^2+b^2\right).$$

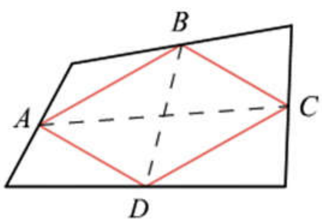


Если у параллелограмма диагонали взаимно перпендикулярны, то он является ромбом.

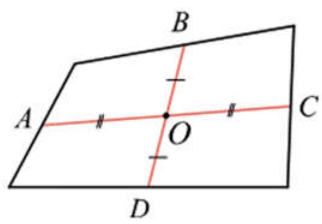


Площадь любого четырехугольника выражается формулой:

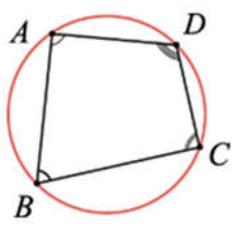
$$S=\frac{1}{2}d_1d_2\cdot\sin\varphi.$$



Середины сторон произвольного четырехугольника являются вершинами параллелограмма, площадь которого равна половине площади четырехугольника (теорема Вариньона).

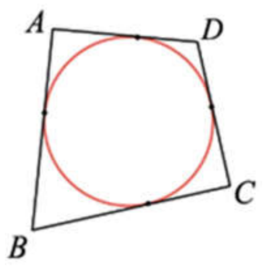


Отрезки прямых, соединяющие середины противоположных сторон четырехугольника, в точке своего пересечения делятся пополам.



Четырехугольник можно вписать в окружность тогда и только тогда, когда суммы его противоположных углов равны 180°:

$$\angle A+\angle C=180^\circ,$$
$$\angle B+\angle D=180^\circ.$$



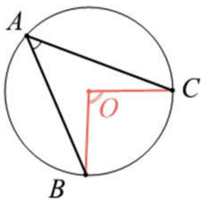
Четырехугольник можно описать вокруг окружности тогда и только тогда, когда суммы длин его противоположных сторон равны:

$$AB+CD=AD+CB.$$

Сумма углов выпуклого четырёхугольника равна 360°.

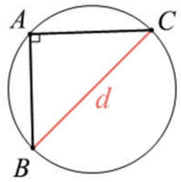
7. Окружность

Вписанные углы окружности:



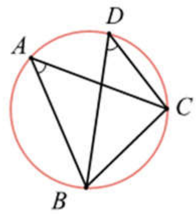
Вписанный угол равен половине соответствующего ему центрального угла:

$$\angle BAC = \frac{1}{2}\angle BOC.$$

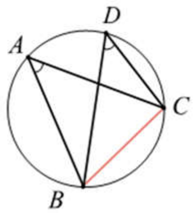


Вписанный угол, опирающийся на диаметр, прямой:

$$\angle BAC = 90°.$$

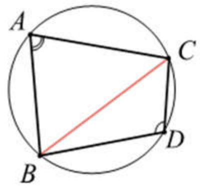


Если два равных угла опираются на один и тот же отрезок, то через вершины этих углов и концы отрезка можно провести окружность.



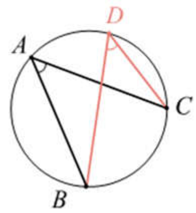
Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же хорду, равны, если их вершины лежат по одну сторону от этой хорды:

$$\angle A = \angle D.$$



Два вписанных угла, опирающихся на одну и ту же хорду, если их вершины лежат по разные стороны от этой хорды, в сумме составляют 180°:

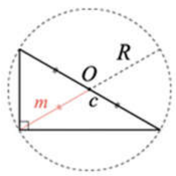
$$\angle A + \angle D = 180°.$$



Вписанные углы, опирающиеся на одну дугу, равны:

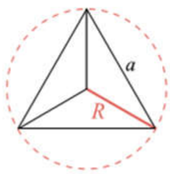
$$\angle A = \angle D.$$

Вписанные в треугольник и описанные около треугольника окружности:



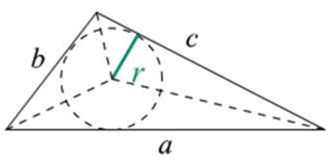
В прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, равна ее половине и равна радиусу описанной окружности:

$$m = \frac{1}{2}c = R.$$



Формула радиуса описанной окружности для правильного треугольника:

$$R = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

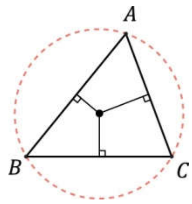


Центр окружности, вписанной в треугольник, совпадает с точкой пересечения биссектрис. Ее радиус находится по формуле:

$$r = \frac{S}{p},$$

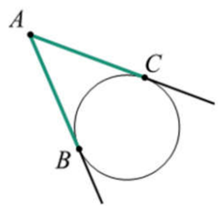
где p – полупериметр:

$$p = \frac{a+b+c}{2}.$$

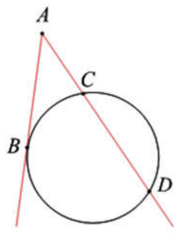


Центром описанной около треугольника окружности является точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

Хорды, секущие и касательные к окружности:

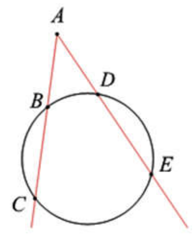


Отрезки касательных к окружности, проведенных из одной точки, равны.



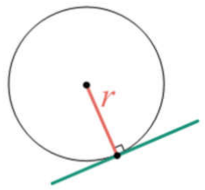
Если к окружности из одной точки A проведены касательная AB и секущая, пересекающая окружность в точках C и D, то справедливо равенство:

$$AB^2 = AC \cdot AD.$$

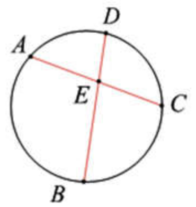


Если к окружности из одной точки A проведены две секущих, пересекающие окружность соответственно в точках B, C и D, E, то справедливо равенство:

$$AB \cdot AC = AD \cdot AE.$$

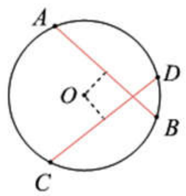


Касательная к окружности перпендикулярна к радиусу этой окружности, проведенному в точку касания.



При пересечении двух хорд окружности получаются отрезки, произведение которых у одной хорды равно произведению отрезков другой хорды:

$$AE \cdot EC = BE \cdot ED.$$



Если хорды равноудалены от центра окружности, то они равны:

$$AB = CD.$$