

## 1. Формулы сокращенного умножения

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

## 2. Квадратные уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D > 0: \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a};$$

$$D = 0: \quad x = -\frac{b}{2a};$$

$D < 0$  – корней нет.

## 3. Свойства степени и корней

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

$$(ab)^n = a^n \cdot b^n$$

$$a^0 = 1 \text{ при } a \neq 0$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$0^0$  – не определено

$$(a^n)^m = a^{nm}$$

Для положительного  $a$ :

- $(-a)^k = a^k$ ,

если  $k$  – чётное.

- $(-a)^k = -(a)^k$ ,

если  $k$  – нечётное.

#### 4. Корни степени $n > 1$

- $\sqrt[n]{a^n} = |a|$ ,  
если  $n$  – чётное.

- $\sqrt[n]{a^n} = a$ ,  
если  $n$  – нечётное.

- $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ .

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$$

$$\sqrt[nk]{a^{nm}} = \sqrt[k]{a^m}$$

#### 5. Иррациональные уравнения

Если  $n$  – четное:

$$\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g^n(x) \end{cases}$$

Если  $n$  – нечетное:

$$\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$$

$$\sqrt[n]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow f(x) = g^n(x)$$

#### 6. Логарифмы

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a x^c = c \log_a x$$

$$\log_{a^c} x = \frac{1}{c} \log_a x$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$$a^{\log_a b} = b,$$

$$b > 0, a > 0, a \neq 1$$

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a = 1$$

Основное логарифмическое тождество:

$$a^{\log_a b} = b$$

- $\log_a(b_1 b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2$
- $\log_a\left(\frac{b_1}{b_2}\right) = \log_a b_1 - \log_a b_2$
- $\log_a b^m = m \cdot \log_a b$
- $\log_{a^k} b = \frac{1}{k} \log_a b$

Формула перехода к другому основанию:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Её следствия:

- $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$
- $\log_a b \cdot \log_b a = 1$
- $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$
- $\log_a b \cdot \log_c d = \log_a d \cdot \log_c b$

## 7. Логарифмические уравнения

$$\log_a x = b, \text{ где } a > 0, a \neq 1, x > 0$$

$$\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$$

$$\log_a x = \log_a y \Leftrightarrow x = y$$

## 8. Показательные уравнения

$$a^x = b, \text{ где } a > 0, a \neq 1$$

$b \leq 0$ : корней нет

$$b > 0: x = \log_a b$$

## 9. Тригонометрия: основные понятия

$\sin x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x$  – нечетные функции;

$\cos x$  – четная функция.

Основной период  $\sin x, \cos x$  –  $2\pi$ ;

Основной период  $\operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x$  –  $\pi$ .

Основное тригонометрическое тождество:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Его следствия:

- $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1$
- $1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
- $1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$

$x$ (градусы)	$x$ (радианы)	$\sin y$	$\cos y$	$tg y$	$ctg y$
0	0	0	1	0	не опр.
30	$\pi/6$	1/2	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
45	$\pi/4$	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	1	1
60	$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	1/2	$\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$
90	$\pi/2$	1	0	не опр.	0
180	$\pi$	0	-1	0	не опр.
270	$3\pi/2$	-1	0	не опр.	0
360	2 $\pi$	0	1	0	не опр.

## 10. Тригонометрия: важные формулы

Формулы суммы и разности углов:

$$\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$$

$$tg(x + y) = \frac{tg x + tg y}{1 - tg x \cdot tg y}$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y$$

$$tg(x - y) = \frac{tg x - tg y}{1 + tg x \cdot tg y}$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$

$$ctg(x + y) = \frac{1 - ctg x \cdot ctg y}{ctg x + ctg y}$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$$

$$ctg(x - y) = \frac{-1 - ctg x \cdot ctg y}{ctg x + ctg y}$$

Формулы двойного аргумента:

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$tg 2x = \frac{2 tg x}{1 - tg^2 x}$$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$$

$$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$$

Универсальная тригонометрическая подстановка:

$$\sin x = \frac{2tg \frac{x}{2}}{1 + tg^2 \frac{x}{2}}$$

$$\cos x = \frac{1 - tg^2 \frac{x}{2}}{1 + tg^2 \frac{x}{2}}$$

Формулы тройного аргумента:

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$$

$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

Формулы половинного аргумента:

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$$

$$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$$

$$\operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}$$

Формулы преобразования суммы и разности в произведение:

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y}$$

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x-y)}{\cos x \cos y}$$

Формулы преобразования произведения в сумму или разность:

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2} (\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} (\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

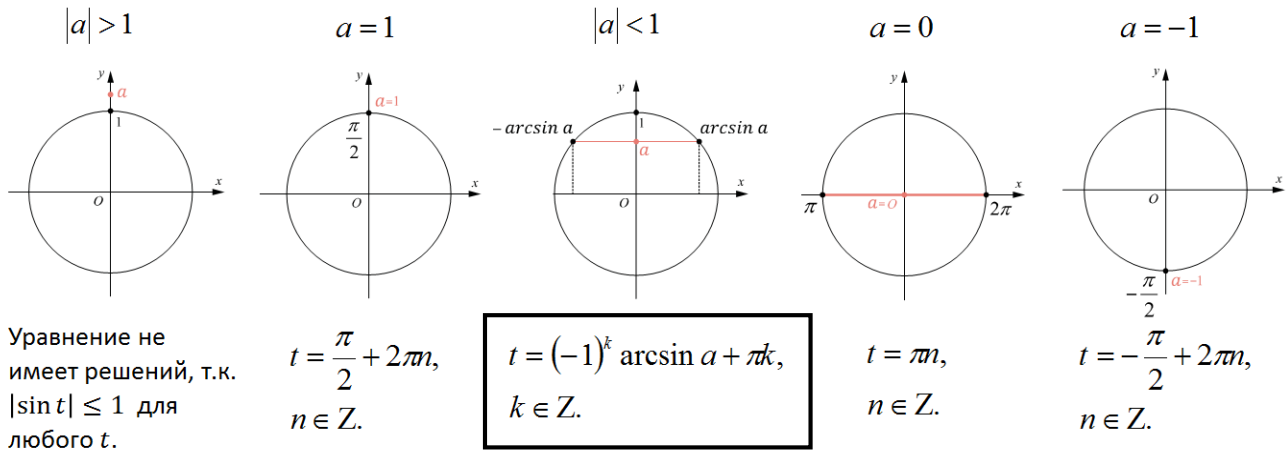
$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} (\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

## 11. Тригонометрия: формулы приведения

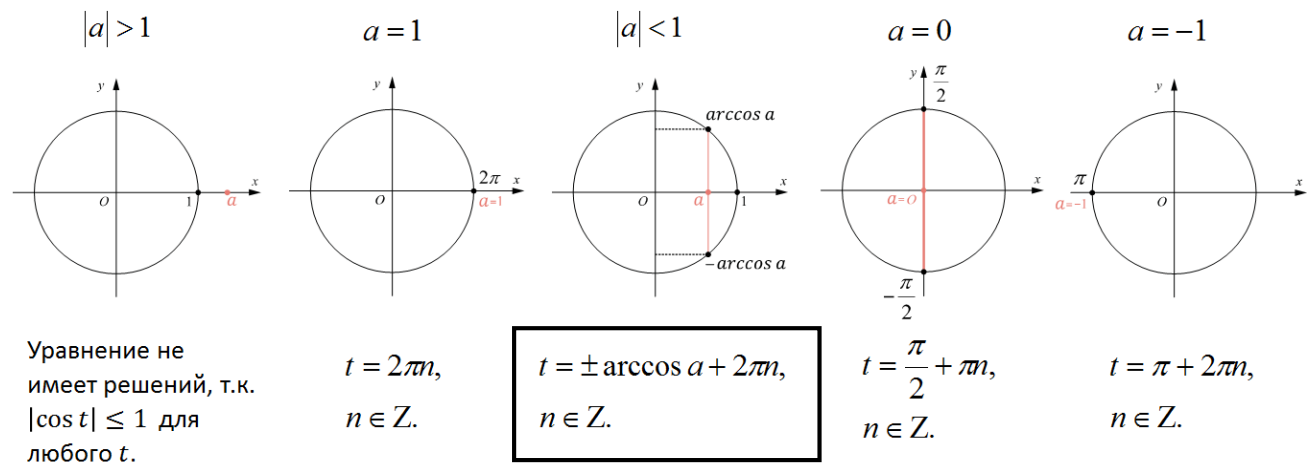
$y$	$\sin y$	$\cos y$	$\operatorname{tg} y$	$\operatorname{ctg} y$
$\pi/2 + x$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\operatorname{ctg} x$	$-\operatorname{tg} x$
$\pi + x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$
$3\pi/2 + x$	$-\cos x$	$\sin x$	$-\operatorname{ctg} x$	$-\operatorname{tg} x$
$2\pi + x$	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$
$-x$	$-\sin x$	$\cos x$	$-\operatorname{tg} x$	$-\operatorname{ctg} x$
$\pi/2 - x$	$\cos x$	$\sin x$	$\operatorname{ctg} x$	$\operatorname{tg} x$
$\pi - x$	$\sin x$	$-\cos x$	$-\operatorname{tg} x$	$-\operatorname{ctg} x$
$3\pi/2 - x$	$-\cos x$	$-\sin x$	$\operatorname{ctg} x$	$\operatorname{tg} x$

## 12. Тригонометрические уравнения

### $\sin t = a$



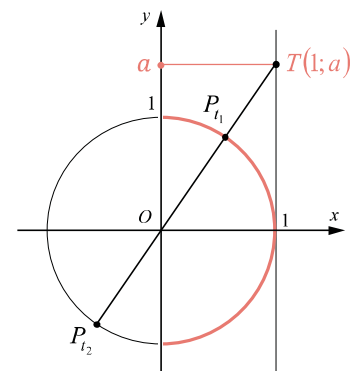
### $\cos t = a$



### $\operatorname{tg} t = a$

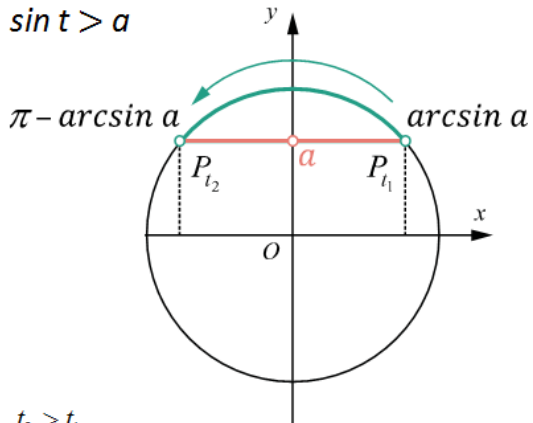
Уравнение  $\operatorname{tg} t = a$  на интервале  $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$  длиной  $\pi$  имеет единственный корень:

$$t = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$



### 13. Тригонометрические неравенства

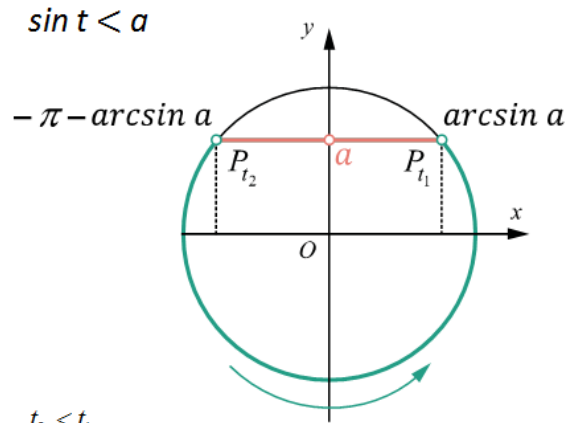
$$\sin t > a$$



$$t_2 > t_1,$$

$$\arcsin a + 2\pi n < t < \pi - \arcsin a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

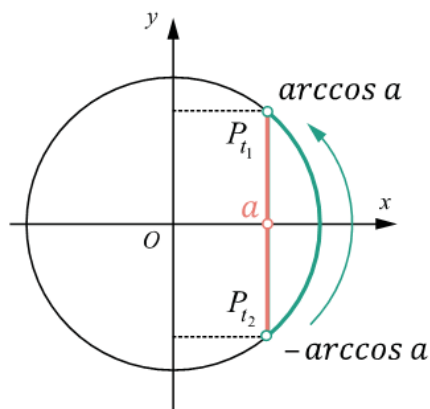
$$\sin t < a$$



$$t_2 < t_1,$$

$$-\pi - \arcsin a + 2\pi n < t < \arcsin a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

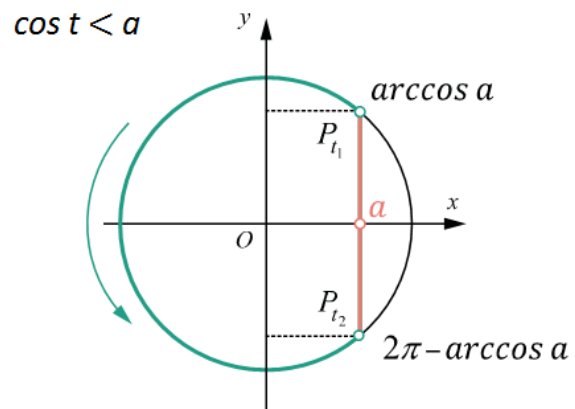
$$\cos t > a$$



$$t_2 < t_1,$$

$$-\arccos a + 2\pi n < t < \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

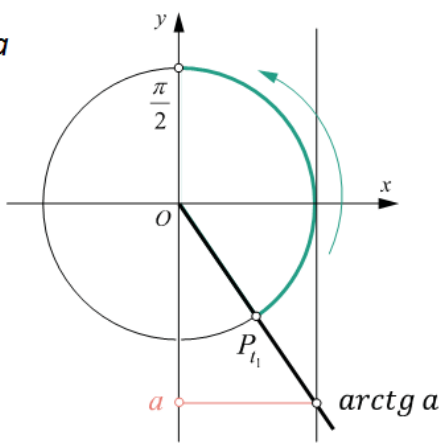
$$\cos t < a$$



$$t_2 > t_1,$$

$$\arccos a + 2\pi n < t < 2\pi - \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

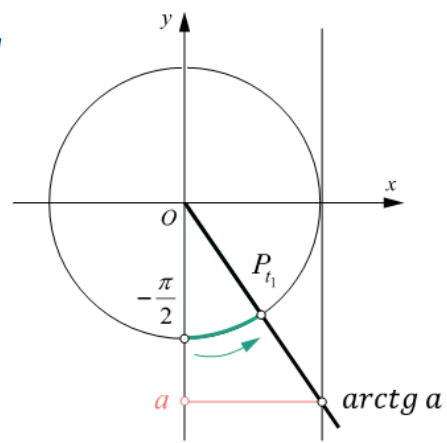
$$\operatorname{tg} t > a$$



$$t_1 < \frac{\pi}{2},$$

$$\operatorname{arctg} a + \pi n < t < \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\operatorname{tg} t < a$$



$$t_1 > -\frac{\pi}{2},$$

$$-\frac{\pi}{2} + \pi n < t < \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$